

Der seltene Pion-Zerfall

$$\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$$

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von

STEPHAN EGLI
von Schänis SG

Begutachtet von
Herrn Prof.Dr.R.Engfer

Zürich 1987
Zentralstelle der Studenschaft



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507228_0013

Der seltene Pion-Zerfall

$$\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$$

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von

STEPHAN EGLI
von Schänis SG

Begutachtet von
Herrn Prof.Dr.R.Engfer

Zürich 1987
Zentralstelle der Studenschaft

Stephan Egli

Der seltene Pion-Zerfall $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$

Zusammenfassung

Im Sommer 1985 wurde am Schweizerischen Institut für Nuklearforschung ein Experiment zur Untersuchung des seltenen Zerfalls

$$\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$$

mit dem SINDRUM Spektrometer durchgeführt. Die Analyse dieses Experiments ergab die folgenden Resultate:

1. Der $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall wurde zum erstenmal beobachtet. Aus den 91 ± 1 gefundenen Ereignissen wurde das totale Verzweigungsverhältnis BR für diesen Zerfall extrapoliert:

$$BR = (3.3 \pm 0.62) \cdot 10^{-9}.$$

Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Verzweigungsverhältnis von $(3.36 \pm 0.08) \cdot 10^{-9}$.

2. Die Werte der schwachen Formfaktoren F_V , F_A und R konnten gemessen werden. Im einzelnen ergab sich:

- Der Betrag des Vektorformfaktors F_V ist in Übereinstimmung mit Vorhersagen aus der CVC Hypothese. Das Vorzeichen von F_V ist positiv.
- Die Zweideutigkeit für den Wert von $\gamma = F_A/F_V$ ist aufgehoben: der Wert von γ ist in Übereinstimmung mit dem *positiven* Wert von γ aus $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experimenten und im Widerspruch zum negativen Wert.
- Der Axialvektorformfaktor R wurde zum erstenmal gemessen. Es ergab sich ein Wert von

$$\xi = \frac{R}{F_V} = 2.4 \pm 0.3$$

in Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage aus der PCAC Hypothese.

3. Es wurden obere Grenzen für das Verzweigungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfalls als Funktion der Masse des Axions a und seiner Lebensdauer bestimmt. Für Lebensdauern unter 10^{-11} s ergeben sich

obere Grenzen für das Verzweigungsverhältnis von bis zu $3 \cdot 10^{-11}$. Damit kann insbesondere die Interpretation des Positronsignals in GSI Experimenten als Zerfall eines Axions in ein e^+e^- -Paar nicht aufrecht erhalten werden.

Die Ergebnisse einer vorläufigen Analyse der Daten sind in [1] und [2] veröffentlicht worden. Die vorliegende Arbeit beschreibt die endgültige Auswertung der Daten und die sich aus ihr ergebenden Resultate.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
2	Die Theorie der Pionzerfälle	5
2.1	Die Zerfallsarten des Pions	5
2.2	Die radiativen Zerfälle des Pions	8
2.2.1	Die Parametrisierung der Zerfallsamplitude	8
2.2.2	Der $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall	11
2.2.3	Der $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall	14
2.3	Der $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfall	18
3	Der Detektor	21
3.1	Grundsätzliche Überlegungen	21
3.2	Aufbau des Detektors	22
3.3	Änderungen im Aufbau gegenüber dem $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ Experiment	25
4	Das Experiment	31
4.1	Überblick	31
4.2	Das Datenformat und der Online Filter	31
4.3	Einstellung und Überwachung der Detektorkomponenten	35
5	Die Offline-Analyse der Daten	43
5.1	Übersicht	43
5.2	Die Eichung des Detektors	45
5.2.1	Position der Kammern	45
5.2.2	Das Hodoskop	46
5.2.3	Das Target	46
5.2.4	Das Magnetfeld	49
5.2.5	Die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Kammern	51
5.3	Der Spurfit und der Vertexfit	52

5.3.1	Der Spurfit	53
5.3.2	Der Vertexfit	59
5.4	Bestimmung der Zahl gestoppter π^+	60
5.4.1	Die "Michel" Methode	62
5.4.2	Die "Pulsshape" Methode	63
6	Die Monte Carlo Simulationen	67
6.1	Motivation	67
6.2	Die Integration des Phasenraums	69
6.3	Die Simulation des Detektors	74
6.4	Die Anpassung an die Daten	76
7	Ergebnisse	81
7.1	Die Selektion der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse	81
7.2	Das Verzweigungsverhältnis	90
7.3	Die schwachen Formfaktoren des Pions	94
7.3.1	Die Maximum-Likelihood-Methode	95
7.3.2	Die Überprüfung der Likelihood-Analyse	99
7.4	Der Zerfall in ein Axion	102
7.5	Diskussion der Ergebnisse	105
	Anhänge	111
A	Der Spurfit und der Vertexfit	113
A.1	Der Spurfit	113
A.2	Der Vertexfit	118
B	Der Signifikanztest	121
C	Das $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Matrixelement	125

Verzeichnis der Abbildungen

1.1	Allgemeiner $\pi\pi\gamma$ - <i>Vertex</i>	2
1.2	Beispiele virtueller Prozesse innerhalb der "Pionblase" . .	3
2.1	Feynmangraphen für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall	9
2.2	Dalitzplot für den $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Zerfall.	13
2.3	Experimentelle und theoretische Werte für γ	15
3.1	Das SINDRUM Spektrometer im $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ Experi- ment	22
3.2	Das aktive Target	26
3.3	Analyse der Signalform	28
3.4	Detailplan der Targetelektronik	29
3.5	Übersichtsplan der Triggerlogik	30
5.1	Verteilung von $t_{e^-} - t_{e^+}$ für Bhabha-Ereignisse	47
5.2	Verteilung der Größen A_{fast} , A_{slow} und V.	48
5.3	Impulsverteilung für Michel-Positronen.	50
5.4	Verteilung von K für $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ Ereignisse.	51
5.5	Datenfluß im Spur- und Vertexfit	54
5.6	reduzierte Pullverteilungen aus Spurfit an gemessene Mi- chelspuren	55
5.7	Wahrscheinlichkeitsverteilung von Q_{min}^2	56
5.8	Impuls- und Winkelauflösung in der $r\phi$ - und rz-Projektion.	58
5.9	Verteilung der Vertices für $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ Ereignisse.	60
5.10	Wahrscheinlichkeitsverteilung von χ_V^2	61
5.11	Amplitudenspektren von Targetzähler 1 für nicht spurkor- relierte Ereignisse.	64
5.12	Amplitudenspektren von Targetzähler 1 für Ereignisse der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Datenbänder.	65
6.1	"Dalitzplot" im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall	72

6.2	Verteilung der Neutrinoenergie und der invarianten Masse des e^+e^- Paares.	73
6.3	Verteilung der Neutrinoenergie und der invarianten Masse des e^+e^- Paares (Transversalimpuls über 16 MeV/c) . . .	74
7.1	Das Zeitkreuz	82
7.2	Verteilung des Öffnungswinkels zwischen dem e^- und dem e^+	83
7.3	Verteilung von t'	84
7.4	Die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $ \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c $	85
7.5	"Rotierte" Vertexverteilung	86
7.6	Die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $ \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c $	88
7.7	Die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $ \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c $	89
7.8	$r\varphi$ - und rz-Projektion eines $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignis mit kleiner invarianter Masse des e^+e^- Paares.	91
7.9	$r\varphi$ - und rz-Projektion eines $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisses mit großer invarianter Masse der e^+e^- Paare.	92
7.10	Höhenlinien-Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen L, N und $L \cdot N$	98
7.11	Verteilungen von kinematischen Größen für die 92 gefundenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse.	101
7.12	Verteilung der kleineren ($m_{e^+e^-}^<$) und der größeren ($m_{e^+e^-}^>$) invarianten Masse der beiden e^+e^- -Paare im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall.	103
7.13	Verteilung der kleineren ($m_{e^+e^-}^<$) und der größeren ($m_{e^+e^-}^>$) invarianten Masse der beiden e^+e^- -Paare für Ereignisse mit $\sum_{i=1}^3 E_i - \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c > 50 \text{ MeV}$	106
7.14	Obere Grenzen für das Verzweigungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e a$ Zerfalls.	107

Verzeichnis der Tabellen

2.1	Die Zerfallskanäle des Pions.	5
2.2	Experimente zum $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall	14
2.3	Theoretische Vorhersagen und Messungen der schwachen Formfaktoren des Pions	18
3.1	Auflösungen des SINDRUM Detektors	24
4.1	Triggerraten,Reduktionsfaktoren und Entscheidungszeiten	36
5.1	Nachweiswahrscheinlichkeiten der Kammern.	52
5.2	Individuelle und globale Auflösungen der Kammern. . . .	57
5.3	Auflösung der Vertexkoordinaten.	61
7.1	Akzeptanz des Detektors und Nachweiswahrscheinlichkei- ten der Triggerstufen und Analyseprogramme	93
7.2	Messwerte des Pionradius aus verschiedenen Experimenten	108
B.1	Signifikanzwerte als Funktion der Anzahl k nächster Nach- barn	123

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Seit seiner Entdeckung im Jahre 1947 durch C. Powell, C. Lattes und G. Occhialini war das Pion Gegenstand einer großen Anzahl von Experimenten, mit denen die unterschiedlichsten Fragen aus dem Gebiet der Teilchenphysik beantwortet werden sollten. Insbesondere führte die Untersuchung der verschiedenen Zerfallsarten des Pions zu einer Fülle neuer Informationen sowohl über die Struktur der schwachen Wechselwirkung als auch über die hadronische Struktur des Pions.

Nach heutigem Verständnis ist das Pion ein stark wechselwirkendes Teilchen, das sich aus einem Quark und einem Anti-Quark aufbaut (Meson). Es existiert in den drei Ladungszuständen π^+ , π^- und π^0 , die den Quarkkonfigurationen $u\bar{d}$, $\bar{u}d$ und $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ entsprechen, wobei "u" ein "up-Quark" und "d" ein "down-Quark" bezeichnet. Die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird durch Gluonen vermittelt. Die physikalische Theorie, die diese Wechselwirkung mathematisch beschreibt, ist die Quantenchromodynamik (QCD). Das Pion¹ hat eine Masse von $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$ und eine Lebensdauer von $\tau_\pi = 26.03 \text{ ns}$. Da die up- und down-Quarks die leichtesten Vertreter der Quarkfamilie sind, ist das Pion das leichteste und damit gewissermaßen auch das einfachste bekannte hadronische System. Dies bedeutet jedoch nicht, daß alle Eigenschaften des Pions aus den Grundgleichungen der Quantenchromodynamik hergeleitet werden könnten. Störungstheoretische Ansätze führen im Niederenergiebereich nicht zum Ziel, da die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung nicht klein gegen 1 ist. Man ist daher gezwungen, den Zusammenhang zwischen experimentell zugänglichen Größen und den grundlegenden Parametern der Theorie wie Massen und Kopp-

¹Im weiteren wird die Bezeichnung "Pion" für die geladenen Teilchen π^+ und π^- verwendet.

lungskonstanten durch Modelle herzustellen, die zusätzliche ad-hoc Annahmen nötig machen. Die sogenannten Formfaktoren übernehmen dabei die Vermittlerrolle zwischen den experimentellen Resultaten und den Parametern der Theorie. Im Idealfall erlauben sie es, die Ergebnisse der Experimente durch Größen zu beschreiben, die *nicht* an konkrete Modelle gebunden sind. Dadurch lassen sich die Vorhersagen der verschiedenen Modelle direkt mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen, ohne das Experiment jeweils neu im Lichte des jeweiligen Modells analysieren zu müssen.

Der grundlegende Ansatz besteht darin, von der allgemeinen Form der Wechselwirkung auszugehen, die mit den Forderungen der Lorentzinvarianz und der Eichinvarianz verträglich ist. Alle unbekannten Terme werden dann in den Formfaktoren zusammengefaßt. Beispielsweise kann der "elektromagnetische" Formfaktor des Pions im allgemeinen Ansatz für den Übergangstrom am $\pi\pi\gamma$ -Vertex eingeführt werden.

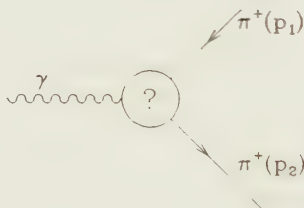


Abbildung 1.1: Allgemeiner $\pi\pi\gamma$ -Vertex.

Der allgemeine lorentzinvariante Ausdruck für diesen Übergangstrom lautet:

$$J_{\pi}^{\mu}(x) = e \cdot [F(q^2)(p_1 + p_2)^{\mu} + G(q^2)(p_1 - p_2)^{\mu}] \cdot e^{-iqx},$$

wobei $F(q^2)$ und $G(q^2)$ zunächst unbekannte Funktionen des Viererimpulsübertrags q^2 sind. In konkreten Modellen wird die Pion-"Blase" durch virtuelle Prozesse gefüllt, wie sie in Bild 1.2 an Hand zweier Beispiele dargestellt sind.

Aus der Forderung der Eichinvarianz ergibt sich, daß der zweite Term keinen Beitrag zum Strom liefern kann:

$$J_{\pi}^{\mu}(x) = e \cdot F(q^2)(p_1 + p_2)^{\mu} \cdot e^{-iqx}.$$

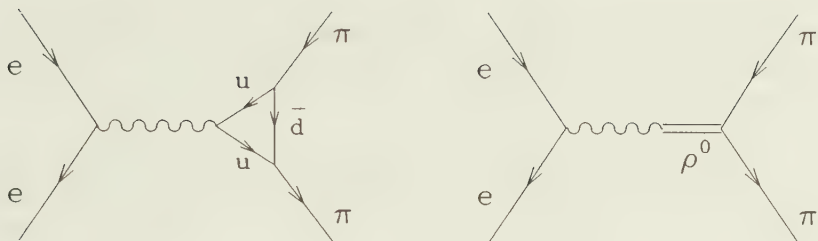


Abbildung 1.2: Beispiele virtueller Prozesse innerhalb der "Pionblase". Der linke Graph entspricht einem Quarkmodell und der rechte Graph einem Vektordominanzmodell.

Die Funktion $F(q^2)$ bezeichnet man als elektromagnetischen Formfaktor des Pions. Diese Größe steht einerseits in direktem Zusammenhang zu meßbaren Wirkungsquerschnitten, wie etwa in der πe -Streuung [49], und andererseits in direktem Zusammenhang zu den Modellparametern, wie zum Beispiel der ρ Masse im Vektordominanzmodell.

Die Formfaktoren beschreiben daher die strukturabhängigen Aspekte der Wechselwirkung des Pions mit anderen Teilchen. Um die Struktur des Pions zu untersuchen, muß das Pion mit Teilchen in Wechselwirkung treten, die als "Sonden" wirken. Hierfür sind insbesondere Teilchen geeignet, die selber der starken Wechselwirkung *nicht* unterliegen, also Teilchen aus der Leptonenfamilie. Ein möglicher Ansatz zur experimentellen Untersuchung der hadronischen Struktur des Pions ist daher die Pion-Elektronstreuung. Als zweite Möglichkeit bietet sich die Untersuchung der "Zerfallskanäle" des Pions. Als leichtestes Hadron kann das Pion nur über die schwache Wechselwirkung zerfallen. Die Rolle der "Sonden" übernehmen hier die Zerfallsprodukte, wobei im Endzustand nur Leptonen auftreten. Es bietet sich damit die einzigartige Gelegenheit, die schwache *und* die elektromagnetische Wechselwirkung zur Untersuchung der Pionstruktur heranzuziehen. Dabei werden bei den Zerfallsexperimenten in Analogie zum elektromagnetischen Formfaktor für die Streuexperimente sogenannte "schwache" Formfaktoren eingeführt.

Das folgende Kapitel behandelt die Zerfallskanäle des Pions, definiert die benötigten Formfaktoren und gibt einen Überblick über die bisher gewonnenen und noch ausstehenden Informationen über die Wechselwirkung und die Struktur des Pions. Insbesondere werden die radiativen Zerfälle $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ in dieser Hinsicht eingehen-

der diskutiert. Die weiteren Kapitel behandeln die Durchführung des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiments und die Auswertung der erhaltenen Daten insbesondere in Hinblick auf die Bestimmung der schwachen Formfaktoren des Pions.

Kapitel 2

Die Theorie der Pionzerfälle

2.1 Die Zerfallsarten des Pions

Bei den Zerfällen des Pions handelt es sich um semileptonische, strangenesserhaltende Prozesse. Ein semileptonischer Prozess beinhaltet einen hadronischen Wechselwirkungsterm und einen leptonischen Wechselwirkungsterm, wobei letzterer als bekannt vorausgesetzt wird[20]. Der hadronische Anteil wird in einen Vektor- und einen Axialvektoranteil zerlegt. Die Pionzerfälle sind strangenesserhaltend, da im Gegensatz zu den schwachen Zerfällen des Kaons keine Umwandlung eines strange-Quarks in ein u-Quark erfolgt. Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die bis zum Beginn dieses $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiments untersuchten Zerfallskanäle des Pions und der zugehörigen Verzweungsverhältnisse [18]. Diese Zerfälle sollen im folgenden kurz diskutiert werden:

Tabelle 2.1: Die Zerfallskanäle des Pions.

Zerfall	Verzweungsverhältnis
$\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$	100%
$\pi^+ \rightarrow e^+\nu$	$(1.228 \pm 0.022) \cdot 10^{-4}$
$\pi^+ \rightarrow e^+\nu\pi^0$	$(1.025 \pm 0.034) \cdot 10^{-8}$
$\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu\gamma^a$	$(1.24 \pm 0.25) \cdot 10^{-4}$
$\pi^+ \rightarrow e^+\nu\gamma^b$	$(5.6 \pm 0.7) \cdot 10^{-8}$
$\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu$	$< 5 \cdot 10^{-9}$

^aDie Werte gelten für Ereignisse mit $E_\mu^{kin} < 3.38 MeV$.

^bDie Werte gelten für Ereignisse mit $E_e > 56 MeV$ und $\theta_{e\gamma} > 132^\circ$.

- Der $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ und der $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e$ Zerfall:

Da es sich um einen Zweikörperzerfall handelt reduziert sich das hadronische Matrixelement auf die Pionzerfallskonstante f_π , multipliziert mit dem Viererimpuls des Pions. Die Pionzerfallskonstante bestimmt sich aus der Lebensdauer des Pions. Da der Impulsübertrag eine Konstante ist, können diese Zerfälle keine Information über die Struktur des Pions liefern. Dies gilt gleichermaßen für den $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e$ wie für den $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ Zerfall. Stattdessen erhält man Informationen über die Struktur der schwachen Wechselwirkung. Die große Diskrepanz in den Verzweigungsverhältnissen dieser beiden Prozesse kann nämlich nur erklärt werden, wenn man annimmt, das das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung (W-Boson) einen Spin 1 besitzt. In diesem Falle kommt es zu einem Konflikt zwischen dem Helizitätstransfer zwischen den Leptonen einerseits und der Drehimpulserhaltung andererseits. Dieser Konflikt ist umso größer, je kleiner die Masse des geladenen Leptons ist. Unter der Annahme des Spins 1 des Austauschteilchens erhält man für das theoretisch erwartete Verhältnis der Zerfallsbreiten des $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e$ und des $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ Zerfalls einen Wert von

$$R = \frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{1 - (m_e/m_\pi)}{1 - (m_\mu/m_\pi)} \right)^2 = 1.28 \cdot 10^{-4}$$

in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert von R , wenn man die Strahlungskorrekturen berücksichtigt (siehe Tabelle 2.1). Damit konnte gezeigt werden, daß das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung einen Spin 1 haben muß und das Elektron und das Myon gleichstark an dieses Teilchen ankoppeln (μ -e-Universalität).

• Der $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ Zerfall:

Dieser Zerfall wird wegen seiner engen Verwandtschaft zum Betazerfall $p \rightarrow n e^+ \nu_e$ auch als Pion-Betazerfall bezeichnet. Aus der Erhaltung der G-Parität folgt, daß in diesem Zerfall nur der *Vektor*anteil des hadronischen Matrixelements beiträgt. Die Untersuchung dieses Zerfalls lieferte eine überzeugende Bestätigung der sogenannten CVC-Hypothese (Conserved-Vector-Current-Hypothesis). Stellt man sich eine Welt freier Quarks vor, so bilden der Isektoranteil des elektromagnetischen Stroms von u- und d-Quarks und der Vektoranteil des schwachen Stroms unterschiedliche Komponenten

eines gemeinsamen Triplets von Isektor-Operatoren. Falls die Masse des u- und d-Quarks übereinstimmen folgt daraus, daß der schwache Vektorstrom erhalten ist. Die CVC-Hypothese postuliert nun, daß diese Eigenschaften auch dann erhalten bleiben, wenn man die Wechselwirkung der Quarks untereinander berücksichtigt. Im $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ Zerfall kann dann eine Formfaktorzerlegung analog zu der in Kapitel 1 für die elektromagnetische Wechselwirkung beschriebenen Zerlegung durchgeführt werden. Auch hier bleibt nur ein Formfaktor übrig, dessen Wert durch die CVC Hypothese festgelegt wird. Damit läßt sich das Verzweigungsverhältnis für diesen Zerfall vorhersagen [20]:

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow \pi^0 e \nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu \nu)} = (1.035 \pm 0.005) \cdot 10^{-8}$$

Dieser Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Verzweigungsverhältnis von $(1.025 \pm 0.034) \cdot 10^{-8}$. Damit bildet der Pion-Betazerfall den bisher genauesten Test der CVC Hypothese für Elementarteilchen. Aus dem Vergleich mit den gemessenen Zerfallsraten beim Myonzerfall läßt sich außerdem der Cabbibo-Winkel θ_C bestimmen, der die relative Stärke der strangenesserhaltende Wechselwirkung zur strangenessverletzenden Wechselwirkung festlegt. Man erhält einen Wert von $\cos \theta_C = 0.97$, was zeigt, daß der strangenesserhaltende Teil sehr viel stärker ist als der strangenessverletzende Beitrag.

Die radiativen Zerfälle:

Die Zerfälle $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \gamma \nu_\mu$, $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ werden als radiative Zerfälle bezeichnet. Bei diesen Zerfällen sind sowohl die Vektorströme als auch die Axialvektorströme am hadronischen Matrixelement beteiligt. Entsprechend werden Vektor- und Axialvektorformfaktoren zur Beschreibung der Übergangsamplitude eingeführt. Die radiativen Zerfälle sind das Thema des folgenden Abschnitts.

2.2 Die radiativen Zerfälle des Pions

Im folgenden sollen die radiativen Zerfälle des Pions eingehender besprochen werden:

$$\left. \begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow l^+ \gamma \nu_l \\ \pi^+ \rightarrow l^+ e^+ e^- \nu_l \end{array} \right\} \text{ mit } l = \mu \text{ oder } l = e .$$

Ziel der Untersuchung dieser Zerfallskanäle¹ ist es, die hadronische Struktur des Pions zu durchleuchten, indem man Energie- und Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte mißt. Da bei diesen Zerfällen sowohl die schwache als auch die elektromagnetische Wechselwirkung beteiligt sind, kann man mehr über die hadronische Struktur des Pions erfahren als bei rein schwachen oder rein elektromagnetischen Prozessen [24]. Die entstehenden Leptonen sind dabei ideale "Sonden" für die hadronische Struktur, da sie selbst der starken Wechselwirkung *nicht* unterliegen.

2.2.1 Die Parametrisierung der Zerfallsamplitude

Die Energie- und Winkelverteilungen der Zerfallsprodukte werden durch die Zerfallsamplitude bestimmt. Eine ausführliche Herleitung der Zerfallsamplitude für die radiativen Zerfälle des Pions findet sich in [19]. Die wichtigsten Schritte dieser Herleitung sollen im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

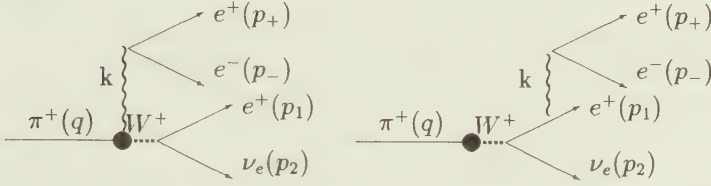
Da der Impulsübertrag $|q|$ im Pionzerfall klein gegen die W-Boson Masse ist ($m_\pi \ll m_W$), kann die Zerfallsamplitude als direktes Produkt eines leptonischen Stroms J_l und eines hadronischen Stroms J_h berechnet werden [19,20,21]:

$$M = \frac{G \cdot \cos \theta_c}{\sqrt{2}} \cdot J_{l\alpha} \cdot J_h^\alpha . \quad (2.1)$$

Der W-Boson Propagator wird dabei durch die effektive Kopplungskonstante G (Fermi Kopplungskonstante $G = 1.05 \cdot 10^{-5} / m_p^2$) ersetzt. θ_c ist der Cabibbowinkel. Diese Zerfallsamplitude läßt sich entsprechend den beiden Feynman-Graphen in Bild 2.1 in einen "inneren Bremsstrahlungsanteil" (IB) und einen "strukturabhängigen Anteil" (SD) aufteilen. Der innere Bremsstrahlungsanteil läßt sich mit den Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik eindeutig berechnen, wobei lediglich die Pion Zerfallskonstante f_π vorgegeben werden muß (siehe Abschnitt 2.1). Er

¹Um die Notation einfach zu halten, wird im weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit $l = e$ angenommen.

enthält daher keine Information über die Struktur des Pions. Die hadro-



a) Strukturabhängiger Term b) Innere Bremsstrahlung

Abbildung 2.1: Feynmangraphen für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall

nische Struktur des Pions wird in den SD Termen berücksichtigt, indem die Zerfallsamplitude durch Formfaktoren parametrisiert wird. Aus den Feynmangraphen erhält man für die Zerfallsamplitude [22]:

$$M = \frac{eG \cos \theta_c}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{f_\pi q^\beta \varepsilon^\alpha M_{\alpha\beta}^l}_{IB^l} + \underbrace{l^\beta \varepsilon^\alpha M_{\alpha\beta}^h}_{SD(+IB^\pi)} \right]. \quad (2.2)$$

Hierbei ist ε^α im $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Zerfall der Polarisationsvektor des reellen Photons und im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall gegeben durch die Impulsvektoren p_+ und p_- des e^+e^- Paares:

$$\varepsilon^\alpha = \frac{e}{k^2} \bar{u}(p_-) \gamma^\alpha v(p_+) \text{ mit } k = p_+ + p_-. \quad (2.3)$$

Der Term l^β ist der Übergangsstrom zwischen dem Positron und dem Neutrino und hat die bekannte V-A Struktur:

$$l^\beta = \bar{u}(p_2) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) v(p_1). \quad (2.4)$$

Das leptonische Matricelement $M_{\alpha\beta}^l$ ergibt sich aus den Feynmanregeln der Quantenelektrodynamik:

$$M_{\alpha\beta}^l = \bar{u}(p_2) \underbrace{\gamma_\beta (1 - \gamma_5)}_{\text{schwacher Vertex}} \underbrace{\frac{m_e - (\not{p}_1 + \not{k})}{2p_1 k + k^2}}_{\text{Propagator}} \underbrace{\gamma_\alpha}_{\text{e.m. Vertex}} v(p_1). \quad (2.5)$$

Das hadronische Matricelement $M_{\alpha\beta}^h$ setzt sich aus einem Vektoranteil und einem Axialvektoranteil zusammen:

$$M_{\alpha\beta}^h = M_{\alpha\beta}^V + i M_{\alpha\beta}^A. \quad (2.6)$$

Der Vektoranteil wird durch den Vektorformfaktor F_V parametrisiert:

$$M_{\alpha\beta}^V = \frac{F_V}{m_\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\gamma q^\delta. \quad (2.7)$$

Die CVC-Hypothese bringt den Vektorformfaktor F_V mit der Lebensdauer des neutralen Pions τ_{π^0} in Verbindung [34]:

$$|F_V| = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2\Gamma_{\pi^0}}{\pi m_{\pi^0}}} \text{ mit } \Gamma_{\pi^0} = \hbar/\tau_{\pi^0}. \quad (2.8)$$

Das Vorzeichen von F_V ist nicht bestimmt. Eine Andeutung, daß F_V ein positives Vorzeichen bezogen auf das als positiv definierte Vorzeichen der Zerfallskonstante f_π hat, stammt aus Experimenten zur elastischen Streuung von Photonen an Protonen [25,26]. Der Axialvektoranteil setzt sich seinerseits aus drei Teilen zusammen:

$$M_{\alpha\beta}^A = \underbrace{f_\pi g_{\alpha\beta}}_{\text{Eichterm}} + \underbrace{f_\pi \frac{2q_\alpha(q-k)_\beta}{2s-t}}_{\text{IB}^\pi=\text{Pion-Polterm}} + \underbrace{M_{\alpha\beta}^{SD}(s,t)}_{\text{Strukturterm}}. \quad (2.9)$$

Hierin sind s und t die lorentzinvarianten Größen $s = q \cdot k$ und $t = k^2$. Für reelle Photonen im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall ist $t = 0$. Der erste Term sichert die Eichinvarianz der Zerfallsamplitude, während der zweite Term als innere Bremsstrahlung an einem strukturlosen Pion aufgefaßt werden kann. Die strukturabhängigen Teile der Axialvektoramplitude sind im Ausdruck $M_{\alpha\beta}^{SD}$ zusammengefaßt. Dieser Term wird durch die zwei Axialvektorformfaktoren F_A und R parametrisiert:

$$M_{\alpha\beta}^{SD} = \frac{F_A}{m_\pi} [(s-t)g_{\alpha\beta} - q_\alpha k_\beta] + \frac{R}{m_\pi} t g_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Der Formfaktor R kann über die PCAC-Hypothese (Partially-Conserved-Axialvector-Current) mit dem elektromagnetischen Radius des Pions in Verbindung gebracht werden [22,24]:

$$R = \frac{1}{3} m_\pi f_\pi \langle r_\pi^2 \rangle. \quad (2.11)$$

Statt F_A und R werden in der Literatur meistens die Größen $\gamma \equiv F_A/F_V$ und $\xi \equiv R/F_V$ eingeführt, wobei für F_V die Vorhersage aus der CVC-Hypothese übernommen wird. Alle Formfaktoren sind im Prinzip Funktionen von s und t . Die Impulsabhängigkeit kann aber wegen des geringen

Impulsübertrags $q^2 < (m_\pi c)^2$ vernachlässigt werden und man setzt näherungsweise $F_V = F_V(s = 0, t = 0)$ und entsprechend für die anderen Formfaktoren.

Die Berechnung des Axialvektorformfaktors F_A ist modellabhängig. Je nach Modell ergeben sich für γ Werte zwischen 0.0 ± 0.3 und 1.4 . Die Vorhersagen der Modelle² sind in Bild 2.3 graphisch zusammengefaßt. Eine tabellarische Aufstellung der Werte findet sich in [30].

Die differentielle Zerfallsrate $d^{3n}\Gamma$ ergibt sich jetzt aus dem über alle Polarisierungen und Spins summierten Quadrat der Zerfallsamplitude durch Multiplikation mit dem Phasenraumfaktor $d\Phi$:

$$d^{3n}\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_\pi} |M|^2 d\Phi_{3n} \text{ mit } d\Phi_{3n} = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (2.12)$$

Dabei sind die p_i die Viererimpulse der n Zerfallsprodukte und P der Vierervektor des zerfallenden Teilchens. Aus der differentiellen Zerfallsrate lassen sich schließlich die Verteilungen der experimentell beobachtbaren Größen wie Energie, Impuls und Richtung der Zerfallsprodukte berechnen.

2.2.2 Der $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall

Für den $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall läßt sich die Integration über die Deltafunktion in Formel 2.12 analytisch durchführen. Die differentielle Zerfallsrate setzt sich aus dem inneren Bremsstrahlungsterm (IB), dem strukturbabhängigen Term (SD) und einem Interferenzterm (INT) zusammen [34]:

$$\frac{d^2\Gamma_{\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e}}{dx dy} = \frac{d^2\Gamma_{IB}}{dx dy} + \frac{d^2\Gamma_{SD}}{dx dy} + \frac{d^2\Gamma_{INT}}{dx dy} \quad (2.13)$$

mit $x = 2E_\gamma/m_\pi$ und $y = 2E_e/m_\pi$. Den Hauptbeitrag zur Zerfallsrate liefern der IB und SD Term. Für diese Terme erhält man die Ausdrücke [32]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma_{IB}}{dx dy} &= \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma_{\pi \rightarrow e \nu} IB(x, y) \\ \frac{d^2\Gamma_{SD}}{dx dy} &= \frac{\alpha}{8\pi} \Gamma_{\pi \rightarrow e \nu} \frac{F_V^2}{r(1-r)^2} \left(\frac{m_\pi}{f_\pi} \right)^2 [(1+\gamma)^2 SD^+ + (1-\gamma)^2 SD^-], \end{aligned} \quad (2.14)$$

²In der Literatur gibt es eine Verwirrung über die Vorzeichenkonvention von γ . Benützt man die Konvention aus [33], die in allen experimentellen Bestimmungen von γ verwendet wird, so ergeben alle Quarkmodelle einen Wert $\gamma > 0$ [23].

wobei die Funktionen IB , SD^+ und SD^- definiert sind als:

$$\begin{aligned} IB &= \frac{1-y+r}{x^2(x+y-1-r)} \cdot \left[x^2 + 2(1-x)(1-r) + \frac{2xr(1-r)}{x+y-1-r} \right] \\ SD^+ &= (x+y-1-r)[(x+y-1)(1-x)-r] \\ SD^- &= (1-y+r)[(1-x)(1-y)+r]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Hierbei ist α die Feinstrukturkonstante und $\Gamma_{\pi \rightarrow e\nu}$ die totale elektronische Zerfallsrate des Pions. Die Größe r ist durch das Verhältnis der Leptonmasse zur Pionmasse gegeben: $r = (m_e/m_\pi)^2$. Der Faktor r ist der "Helizitätsfaktor", welcher eine entscheidende Rolle bei den radiativen Zerfällen des Pions spielt, da er die relative Stärke des IB Anteils zum SD Anteil bestimmt. Im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall wird der innere Bremsstrahlungsanteil gegenüber dem strukturabhängigen Anteil um einen Faktor $1.28 \cdot 10^{-4}$ stärker unterdrückt als im $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \gamma \nu_\mu$ Zerfall. Letzterer ist daher völlig durch den IB Anteil dominiert, so daß der $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \gamma \nu_\mu$ Zerfall zur Untersuchung der strukturabhängigen Beiträge ungeeignet ist. Erst die starke Unterdrückung des $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfalls gegenüber dem $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfall schafft also die Voraussetzung dafür, das sich aus Experimenten zur Untersuchung der elektronischen radiativen Zerfälle Rückschlüsse ziehen lassen auf die Struktur des Pions.

Bild 2.2 zeigt den Verlauf der Funktionen IB , SD^+ und SD^- im "Dalitzplot", bei dem als unabhängige Variablen die Energien des Photons E_γ und des Positrons E_e gewählt werden. Der kinematisch erlaubte Bereich ist dabei durch die Linien $E_\gamma = m_\pi c^2/2$ ($x = 1$), $E_e = m_\pi c^2/2$ ($y = 1$) und $E_\nu = m_\pi c^2/2$ ($x + y = 1$) begrenzt. Die kinematischen Konfigurationen, die diesen Grenzfällen entsprechen, sind ebenfalls angedeutet. Man erkennt, daß der innere Bremsstrahlungsanteil in den Konfigurationen wirkungsvoll unterdrückt ist, in welchen das Photon entgegengesetzt zum Positron emittiert wird ($\theta_{e\gamma} = \pi$).

Experimentell kann der Wert von γ aus der Messung der Zerfallsrate bestimmt werden. Um Gebiete des Phasenraums zu vermeiden, die durch den IB-Anteil oder durch zufällige Untergrundreaktionen dominiert sind, muß man sich bei den $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experimenten auf den Teil des Phasenraums beschränken, der in Bild 2.2 als schraffiertes Rechteck angedeutet ist. Die Verzweungsverhältnisse für diesen Teil des Phasenraums sind für die IB- und SD-Anteile in Klammern angegeben. Es trägt praktisch nur der SD^+ Term zur Zerfallsrate bei. Dieser Term ist proportional zu $(1+\gamma)^2$ ist, so daß man aus der gemessenen totalen Rate

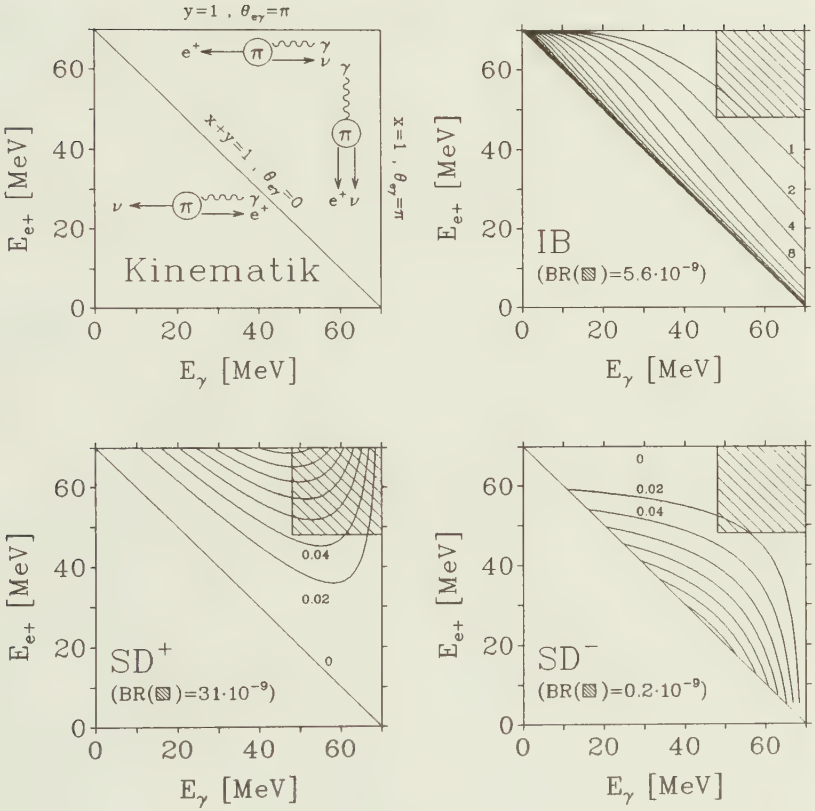


Abbildung 2.2: Dalitzplot für den $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall. Die Zerfallsrate ist nach inneren Bremsstrahlungstermen (IB) und strukturabhängigen Termen (SD) aufgeteilt. Die eingezeichneten Linien sind die Höhenlinien der entsprechenden Funktionen.

zwei mögliche Werte für γ erhält. Bisher wurden fünf Experimente zum $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall durchgeführt. Die Resultate dieser Experimente sind in Tabelle 2.2 zusammengefaßt. Die letzte Spalte gibt das Wahrscheinlich-

Tabelle 2.2: Experimente zum $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall

Referenz	γ^+	γ^-	Fehler	Anzahl Ereignisse	L_+/L
[27]	0.29	-1.99	-	143	-
[28]	0.19	-2.11	± 0.11	170 ± 15	-
[29]	0.48	-2.40	± 0.12	226 ± 22	1 : 3
[30]	0.52	-2.48	± 0.06	653 ± 29	8.5 : 1
[31]	0.25	(-2.13)	± 0.12	218 ± 67	2175 : 1

keitsverhältnis L_+/L an, mit dem bei der Analyse dieser Experimente der positive γ Wert gegenüber dem negativen Wert bevorzugt wird. Die Resultate in [31] schließen den negativen γ Wert aus, indem bei diesem Experiment auch in den Teilen des Phasenraums gemessen wurde, die auf den SD^- Anteil empfindlich sind. Dabei mußte dann aber ein schlechtes Signal/Untergrund-Verhältnis in Kauf genommen werden, weshalb der Fehler von γ deutlich höher als bei [30] ausfällt. Bild 2.3 faßt die theoretisch und experimentell ermittelten Werte von γ graphisch zusammen. Die Analyse der $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experimente beruht auf der Annahme, daß der Wert des Vektorformfaktors durch die CVC-Hypothese gegeben ist. Für einen unabhängigen Test der CVC Hypothese im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall wäre es daher von Interesse, nicht nur den Wert von $\gamma = F_V/F_A$, sondern die Werte der Formfaktoren F_V und F_A unabhängig voneinander zu bestimmen. Dies ist im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall nicht möglich. Ein theoretischer Ausweg bestünde in der Messung der Photonpolarisation [46], da Photonen mit positiver Helizität, das heißt rechts zirkular polarisierte Photonen, mit Termen proportional zu $(F_V + F_A)$ einhergehen, während Photonen mit negativer Helizität durch Terme proportional zu $(F_V - F_A)$ beschrieben werden. Diese Möglichkeit scheitert jedoch an der experimentellen Undurchführbarkeit einer solchen Polarisationsmessung.

2.2.3 Der $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall

Die enge Verwandtschaft zum $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall läßt erwarten, daß sich aus dem $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall ähnliche Informationen über die hadroni-

Abbildung 2.3: Experimentelle und theoretische Werte für γ .

Experimente:

P.Depommier et al. (1963)

A.Stetz et al. (1974)

A.Stetz et al. (1979)

A.Bay et al. (1986)

L.Piilonen et al. (1986)

Theorie:

soft pion [33,34]

hard pion[33,34]

quark-parton A_1, ρ dominance [35]

static quark model [33,34]

relativistic quark model [36,37]

σ -model (white quarks) [38]

σ -model (coloured quarks) [39]

non-perturbative QCD [40]

chiral lagrangian [41,42,43,44]

quark and baryon loop [45]



schen Aspekte des schwachen Strommatrixelements J_h^α gewinnen lassen wie im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall (siehe Herleitung der Zerfallsamplitude für beide Zerfälle in Abschnitt 2.2.1). Trotzdem ändert sich die Situation sowohl in theoretischer als auch in experimenteller Hinsicht:

- Unterschiede in der Theorie:

- Das virtuelle Photon konvertiert intern in ein $e^+ e^-$ -Paar. Es ist daher nicht mehr auf die Massenschale gezwungen ($k^2 \neq 0$ siehe Formel 2.9). Dieser zusätzliche Freiheitsgrad führt dazu, daß die Zerfallsamplitude von einem weiteren Formfaktor R (Formel 2.10 und Formel 2.11) abhängt.
- Der Endzustand hat ein Teilchen mehr, weshalb der Phasenraum drei zusätzliche Dimensionen aufweist. Entsprechend schwieriger gestaltet sich die Berechnung der differentiellen Zerfallsrate.

- Experimentelle Unterschiede:

- Das Verzweigungsverhältnis für den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall ist um zwei Größenordnungen (Faktor α/π) niedriger als im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall. Daher sind ein Detektor mit großer Akzeptanz und ein hochintensiver Pionstrahl unumgängliche Voraussetzungen für die Durchführung eines Experiments zum $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall.
- Dem Nachteil des niedrigen Verzweigungsverhältnisses steht der Gewinn an experimentell verwertbarer Information gegenüber. Es können die Impulsvektoren aller geladenen Zerfallsprodukte bestimmt werden und Vergleiche zwischen experimentellen und theoretischen *Verteilungen* in vielfältiger Weise durchgeführt werden. Der experimentell zugängliche und verwertbare Teil des Phasenraums ist nicht auf Energien oberhalb von etwa 50 MeV beschränkt, sondern erstreckt sich bis zu Energien der geladenen Teilchen von 15 MeV. Die Messung der Impulsvektoren des aus dem virtuellen Photon entstehenden $e^+ e^-$ -Paares erlaubt es, einen Teil der Information, die mit der Photonpolarisation im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall verknüpft ist, wiederzugewinnen [22]. Daher können die Formfaktoren F_V, F_A und R *unabhängig* voneinander bestimmt werden (siehe Abschnitt 7.3.1).

Die Berechnung der differentiellen Zerfallsrate läßt sich nicht mehr wie beim $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall in geschlossener Form darstellen. Die Vielzahl der möglichen Spinkombinationen und die durch das Pauli Prinzip geforderte Antisymmetrisierung der Zerfallsamplitude gegenüber der Vertauschung der beiden Positronen führt zu einem sehr unhandlichen Ausdruck für die Zerfallsamplitude. Um die Anzahl der möglichen Interferenzterme so gering wie möglich zu halten, kann man ausnützen, daß sich bei Vernachlässigung der Elektronenmasse die geladenen Zerfallsprodukte in einem Zustand definierter Helizität befinden. Zustände unterschiedlicher Helizität interferieren nicht miteinander. Daher wurden die möglichen Spinkombinationen durch zweikomponentige Spinoren mit definierter Helizität dargestellt. Die Methode ist in [22] ausführlich beschrieben. Die Berechnung der Zerfallsamplitude wurde von Alfred Kersch (Universität Mainz) auf der Basis dieser Methode durchgeführt (Anhang C). Das Matrixelement des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfalls ergibt sich damit aus der Summe von 10 Termen:

$$\begin{aligned}
 |M|^2 = & IB + \\
 & F_V^2 \cdot (SD + \gamma SD_\gamma + \gamma^2 SD_{\gamma^2} + \gamma \xi SD_{\gamma \xi} + \xi SD_\xi + \xi^2 SD_{\xi^2}) + \\
 & F_V \cdot (IBSD + \gamma IBSD_\gamma + \xi IBSD_\xi) .
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dabei sind die Größen IB, SD und IBSD Funktionen der kinematischen Variablen. Die Bezeichnung der Funktionen entspricht der Bezeichnung im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall für den inneren Bremsstrahlunganteil (IB), die strukturabhängigen Anteile (SD) und die Interferenzterme (IBSD). Der Beitrag der Interferenzterme zur totalen Rate ist sehr gering. Im Grenzfall $m_e \rightarrow 0$ verschwindet dieser Beitrag völlig, da die strukturabhängigen Terme und die inneren Bremsstrahlungsterme unterschiedliche Helizitätsstrukturen aufweisen [22].

Um die differentielle Zerfallsrate zu berechnen, muß das Matrixelement aus Formel C über den Phasenraum integriert werden. Diese Integration ist nur numerisch durchführbar. Die dazu notwendigen Verfahren und die sich ergebenden Verteilungen der kinematischen Größen werden in Abschnitt 6.2 behandelt.

Bisher wurde ein Experiment zur Suche nach dem $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall durchgeführt [47]. In diesem Experiment konnten keine $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfälle beobachtet werden. Daraus ergab sich als obere Grenze für das Verzweigungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfalls ein Wert von $4.8 \cdot 10^{-9}$, wobei ein konstantes Matrixelement für den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$

Zerfall angenommen wurde.

Tabelle 2.3 gibt einen Überblick über die Situation in Bezug auf die Bestimmung der schwachen Formfaktoren des Pions, wie sie sich zu Beginn dieses $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiments darstellte.

Tabelle 2.3: Theoretische Vorhersagen und Messungen der schwachen Formfaktoren des Pions

Formfaktor	Theorie	Vorhersage	Experiment
F_V	CVC ($F_V \Leftrightarrow \tau_{\pi^0}$)	$ F_V ^a = 0.0255$	-
F_A ($\gamma = \frac{F_A}{F_V}$)	Modelle	$\gamma = 0 \dots 1.4$	$\gamma = 0.48$ oder -2.4 [29]
R ($\xi = \frac{R}{F_V}$)	PCAC ($R \Leftrightarrow \langle r_\pi^2 \rangle$)	$ \xi ^b = 2.67$	-

^aEs wurde der Wert $\tau_{\pi^0} = (0.897 \pm 0.022 \pm 0.017) \cdot 10^{-16}$ s aus [48] verwendet

^bFür $\langle r_\pi^2 \rangle$ wurde der Wert aus [49] verwendet: $\langle r_\pi^2 \rangle = (0.432 \pm 0.016) fm^2$

Unser $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiment wurde mit dem Ziel durchgeführt, die Lücken bei der experimentellen Bestimmung der Formfaktoren zu schließen. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Auflösung der Zweideutigkeit für den Wert von γ und der Messung des zweiten Axialvektorformfaktors R. Um die Notation einfach zu halten, werden im Abschnitt 6.2 und in Kapitel 7 "Standardwerte" der Formfaktoren verwendet, die wie folgt definiert sind:

$$F_V = 0.0255 \text{ (CVC Wert)} \quad (2.17)$$

$$F_A = 0.0133 \text{ (entspricht } \gamma = 0.52 \text{ aus [30])}$$

$$R = 0.0682 \text{ (entspricht PCAC Wert } \xi = 2.67) .$$

2.3 Der $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfall

Im Jahre 1986 wurde von R.D. Peccei, T.T. Wu und T.Yanigada [3] ein neuer Zerfallskanal des Pions postuliert, bei dem das Pion über ein sogenanntes Axion a zerfallen soll:

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$$

Das Axion ist dabei ein neutrales, pseudoskalaros Boson, das seinerseits in ein $e^+ e^-$ -Paar zerfallen soll. Dieses Teilchen wurde eingeführt, um die CP-Symmetrie in der starken Wechselwirkung zu erklären [4,5,6,7]. Es

wurden eine Vielzahl von Experimenten zur Suche nach dem Axion durchgeführt, jedoch konnte in keinem der Experimente ein Axionsignal beobachtet werden [8]. Die Axionsuche wurde neu belebt durch die Entdeckung eines monoenergetischen Positronsignals mit einer kinetischen Energie von 300 keV [9,10,11] und der Beobachtung korrelierter e^+e^- -Paare [12] bei Experimenten zur Kollision schwerer Ionen am GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung). Dabei wurden die beobachteten e^+e^- -Paare mit dem Zerfall eines Axions mit einer Masse $m_a = 1.7 \text{ MeV}/c^2$ in Verbindung gebracht [13,14,15,16,3]. Um die beobachteten Effekte erklären zu können, mußte das ursprüngliche Axionmodell abgewandelt werden [3]. Diese neuen Axionen sollten hauptsächlich an leichte Quarks und Elektronen koppeln und die isoskalare Kopplung sollte verschwinden. Für die Lebensdauer des Axions wurde ein Wert $\tau_a = 6 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ berechnet und der Zerfall $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ sollte mit einem Verzweigungsverhältnis von $3 \cdot 10^{-6}$ stattfinden [17]. Damit hätte dieser Zerfall die gleiche Signatur wie der hier untersuchte $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall und sollte bei einer Empfindlichkeit des SINDRUM Detektors von circa 10^{-10} mit Sicherheit nachzuweisen sein. Die Konsequenzen, die sich aus der Messung des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfalls in diesem Experiment für das neue Axionmodell ergeben, werden im Abschnitt 7.4 eingehender behandelt.

Kapitel 3

Der Detektor

3.1 Grundsätzliche Überlegungen

Die Untersuchung von seltenen Zerfällen wie des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfalls mit einem Verzweungsverhältnis von 10^{-10} stellt hohe Anforderungen an den Beschleuniger und den Detektor. Diese sind im einzelnen:

- Für den Beschleuniger:

Bereitstellung eines hochintensiven π Strahls (etwa $10^7 \pi/s$) von geringem Impuls (unter 100 MeV/c), um eine maximale Stoppdichte in einem möglichst dünnen Target zu erreichen.

- Für den Detektor:

1. große Akzeptanz des Detektors
2. gute Unterdrückung von Untergrundreaktionen durch minimalen Materialaufwand für das Target und die Kammern
3. Unterdrückung des zufälligen Untergrunds durch eine gute Zeit- und Vertexauflösung
4. schnelle Spurerkennung für positiv und negativ geladene Zerfallsprodukte
5. ein intelligenter Trigger, der selektiv auf die Signatur des gesuchten Zerfallkanals (zwei positiv und ein negativ geladenes Teilchen) anspricht und eine Triggerrate von unter 10 Hz liefert (Grenzwert gegeben durch die Auslesekapazität des Computers)

Die Bedingungen an den Strahl können vom π E3 Areal am Schweizerischen Institut für Nuklearforschung (SIN) erfüllt werden. Bei einem primären Protonenstrom von $200 \mu A$ und einem Strahlimpuls der Pionen

von 95 MeV/c werden bis zu $10^7 \pi^+$ pro Sekunde geliefert. Die Bedingungen an den Detektor werden vom SINDRUM Spektrometer erfüllt, das speziell für die Untersuchung seltener π und μ Zerfälle konstruiert wurde.

3.2 Aufbau des Detektors

Das SINDRUM Spektrometer wurde zuerst für die Suche nach dem verbotenen Zerfall $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ eingesetzt. Bild 3.1 zeigt eine Ansicht des Detektors entsprechend dem damaligen Aufbau. Der Aufbau des Detek-

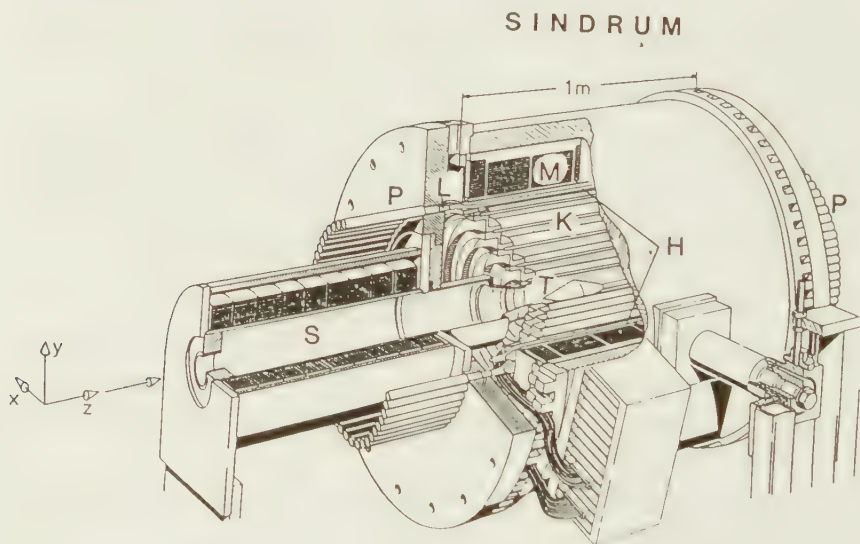


Abbildung 3.1: Das SINDRUM Spektrometer im $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ Experiment

tors für das $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ Experiment ist in mehreren Arbeiten [50,51,52] ausführlich beschrieben worden. Deshalb sei an dieser Stelle nur eine kurze Übersicht über die wichtigsten Komponenten des Detektors und die erreichten Auflösungen gegeben. Anschließend werden die benötigten Änderungen und Ergänzungen für den Aufbau des Spektrometers im $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiment eingehender diskutiert.

Die Spuren der geladenen Zerfallsteilchen werden durch fünf zylindrische Violdrahtproportionalkammern (K) nachgewiesen, die innerhalb der Magnetspule (M) konzentrisch um das Target angeordnet sind. Die Kammern decken dabei 73% des totalen Raumwinkels von 4π sr ab. Trotz selbsttragender Konstruktion der Kammern erlaubt es deren Bauweise aus Sandwichstrukturen, den Materialaufwand im sensitiven Teil des Detektors niedrig zu halten: die Gesamtdicke aller fünf Kammern beträgt lediglich $5.7 \cdot 10^{-3}$ Strahlungslängen. Beim Durchstoß eines Teilchens durch eine Kammer werden einige Gasatome ionisiert. Die freigesetzten Elektronen werden im starken elektrischen Feld des Anodendrahts so stark beschleunigt, daß sie weitere Atome ionisieren, und so kommt es zu einer lawinenartigen Vermehrung der Ladungsträger und damit zu einem nachweisbaren Signal an den Anodendrahten. Bei drei Kammern (im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiment bei vier Kammern, siehe Abschnitt 3.3) sind die Kathodenflächen in Streifen unterteilt, die auf der Innenseite einen Winkel von $+45^\circ$ und auf der Außenseite einen Winkel von -45° mit der Detektorachse bilden. Die erzeugte Ladungslawine induziert auf den Streifen Signale, deren Amplitude ebenfalls gemessen wird. Dadurch ist man in der Lage, sowohl die ϕ Koordinate als auch die z Koordinate der Durchstoßpunkte zu bestimmen (siehe Bild 3.1 für die Definition des Koordinatensystems). Die Bahnen der Spuren werden im homogenen Magnetfeld des Solenoids von 3.37 kG ($\Delta B/B < 1\%$) gekrümmt, wobei der Transversalimpuls die Größe des Krümmungsradius festlegt. Die Auswertung der Kammersignale liefert also schließlich die Ladung und den Impuls für jedes geladene Zerfallsteilchen und aus der Rekonstruktion mehrerer Spuren die Vertexkoordinaten (Lage des Zerfallsortes). Die Kammern sind von einem zylindrischen Hodoskop (H), bestehend aus 64 Szintillatorstäben rechteckigen Querschnitts, umgeben. Jeder Szintillator wird an beiden Seiten von einem Photomultiplier (P) ("Sekundärelektronenvervielfacher") ausgelesen, womit eine genaue Zeitmessung ermöglicht wird.

Tabelle 3.1 faßt die mit dem SINDRUM Spektrometer erreichten Orts-, Impuls-, Winkel- und Zeitaufösungen zusammen (siehe auch Kapitel 5).

Der Trigger [53] besteht aus vier Stufen, um bei möglichst geringen Totzeitverlusten am Ausgang der letzten Triggerstufe eine Rate unter 10 Hz zu liefern. Die erste Stufe beruht auf der Zeitinformation des Hodoskops: in einer Majority-Logik wird verlangt, daß mindestens drei Szintillator-Cluster (Gebiete nicht benachbarter Szintillatoren) innerhalb

Tabelle 3.1: Auflösungen des SINDRUM Detektors

Größe	Auflösung (σ)
Zeit (eine Spur)	180 ps
z-Koordinate (Hodoskop)	25 mm
z-Koordinate (Kammer 1)	0.36mm
Winkel ($r \cdot \phi$)	20 mrad
Winkel ($s \cdot z$)	11mrad
Vertex ($\Delta x, \Delta y$)	1.2mm
Vertex (Δz)	1.0mm
Transversalimpuls bei 50 MeV/c	4.0%
Transversalimpuls bei 20 MeV/c	3.0%

eines Zeitfensters von 5 ns angesprochen haben. Die zweite (CPS = Charge Preselector), dritte (TPS = Track Preselector) und vierte Stufe (TCR = Track Correlator) benützen zu Sektoren zusammengefaßte Anodendrähte der Drahtkammern als Grundlage einer schnellen Spurerkennung. Dabei werden die Hitmuster der gefeuerten Sektoren¹ mit vorher bestimmten Mustern echter Spuren verglichen und bei Übereinstimmung die entsprechende Spur zwischengespeichert. Der CPS benützt dabei nur die äußeren drei Kammern und sucht nur nach negativ geladenen Teilchen, während der TPS mit höherer Auflösung und mit der Information von allen fünf Kammern sowohl nach positiv als auch negativ geladenen Teilchen sucht. Der CPS triggert, sobald er mindestens eine negative Spur² findet. Der TPS triggert, wenn die Anzahl der gefundenen positiven und negativen Spuren innerhalb eines vom Experimentator eingestellten Bereiches liegt (üblicherweise werden mindestens eine negative und zwei positive Spuren verlangt). Der TCR überprüft schließlich, ob es eine Kombination von einer negativen und zwei positiven Spuren gibt, die alle auf verschiedene Szintillatoren gerichtet sind und zusammen einen maximal erlaubten Transversalimpuls ϵ nicht überschreiten. Der Wert von ϵ kann ebenfalls frei gewählt werden und war während des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiments auf den maximal möglichen Wert gesetzt, wodurch die zuletztgenannte Bedingung für den Transversalimpuls immer erfüllt war.

¹ein Sektor, bei dem mindestens ein Draht angesprochen hat

²Im folgenden benutze ich die Bezeichnung negative (positive) Spur als Abkürzung für eine Spur, die von einem negativ (positiv) geladenen Teilchen erzeugt wird.

3.3 Änderungen im Aufbau gegenüber dem $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ Experiment

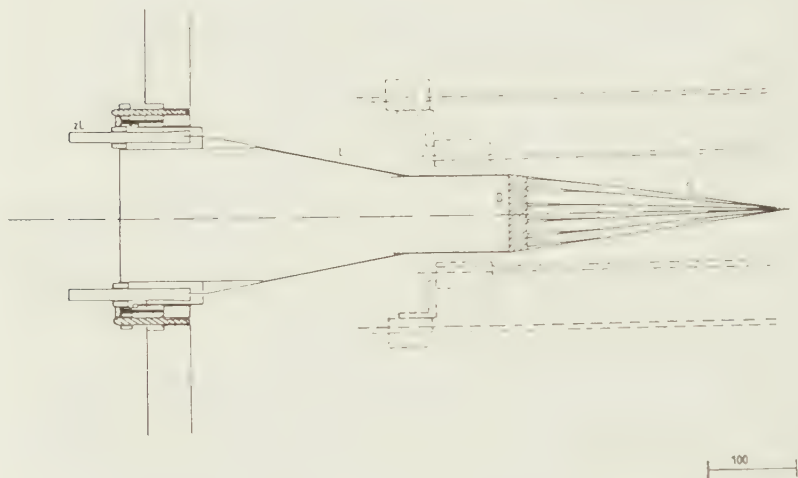
Das SINDRUM Spektrometer konnte weitgehend unverändert aus dem $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ Experiment übernommen werden. Einige Änderungen im Detektoraufbau waren jedoch unumgänglich:

- Der Übergang von einem μ^+ Strahl mit einem Impuls von 28 MeV/c zu einem π^+ Strahl von 95 MeV/c erforderte den Ausbau des Solenoids (S im Bild 3.1), das im $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ Experiment als magnetische Linse gewirkt hat. Darum mußte der Strahlfokus um 60 cm vorverlegt werden.
- Bei der vierten Triggerstufe (TCR) mußte die Bedingung an einen maximalen totalen Transversalimpuls fallengelassen werden, da andernfalls ein großer Teil der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfälle verlorengegangen wäre (die Phasenraumverteilung für $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse häuft sich bei großem Transversalimpuls).

Außerdem wurde die Auslese der Kammerkathoden modifiziert. Ursprünglich wurden die auf den Kathodenstreifen induzierten Signale auf der Innen- und Außenseite der ersten, dritten und fünften Kammer mit dem LeCroy ADC System 2280 digitalisiert. Dadurch standen pro Teilchen maximal drei z-Koordinaten zur Verfügung, um die Spur im Raum zu rekonstruieren. Es zeigte sich, daß dies nicht immer ausreichte, um Doppeldeutigkeiten bei der Zuordnung der "Hits" zu den Spuren aufzulösen. Daher wurde im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiment auch die zweitinnerste Kammer mit Kathodenstreifen versehen und über das ADC System ausgelesen. Die dazu benötigte Elektronik wurde der Auslese der inneren Kathoden von Kammer 3 und Kammer 5 entnommen. Diese Innenkathoden wurden dann stattdessen über das WCRS System (Wire Chamber Readout System) ausgelesen, das es erlaubte, alle Kathodenstreifen zu registrieren, die Signale mit einer Amplitude oberhalb einer einstellbaren Schwelle lieferten. Diese Information reichte aus, um Doppeldeutigkeiten aufzulösen. Da aber auf der Innenkathode von Kammer 3 und Kammer 5 die Amplitude der induzierten Signale nicht mitgemessen wurde, verschlechterte sich die z-Auflösung für diese Kammern um den Faktor $\sqrt{2}$. Dies hatte jedoch keinen entscheidenden Einfluß auf die Auflösung der Spurparameter, da die Ortsauflösung für die äußeren Kammern durch Vielfachstreuung dominiert wurde (siehe Anhang A).

Die wichtigste Erweiterung bestand im Einbau eines aktiven Targets an Stelle des passiven Targets im $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$ Experiment. Bild 3.2 zeigt den Aufbau und die Lage des Targets im SINDRUM Detektor. Der

Abbildung 3.2: Das aktive Target



aktive Teil des Targets besteht aus 12 Szintillatoren (S) in Form von Dreiecken, die zusammen einen Hohlkegel bilden. Die Dicke jedes Dreiecks beträgt 1.2 mm, was einer effektiven Dicke in Strahlrichtung von 8.5 mm entspricht. Jeder Szintillator ist von einer doppelten Lage $15\mu\text{m}$ dicker Aluminiumfolie umwickelt, die die Szintillatoren lichtdicht abschließen. An die Szintillatoren aus Polystyren (NE 102A) schließen sich gebogene Lichtleiter (L) mit einer Gesamtlänge von 480 mm an, die die Verbindung der Szintillatoren zu den zylindrischen Lichtleitern (zL) herstellen. Auf diese werden die Photomultiplier (identische Bauweise wie beim Hodoskop) aufgeschraubt. Das ganze Target ist an der Eintrittsseite des Strahls mit dem SINDRUM Magneten verschraubt. Die genaue Lage entlang der z-Achse (Strahlachse) läßt sich über Justierschrauben einstellen. Der π^+ -Strahl mit einem Impuls von 95 MeV/c wird auf einen Degrader (D) aus 23mm dickem Delrin (ein Homopolymerisat) fokussiert. Dadurch werden die Pionen so stark abgebremst, daß sie anschließend im aktiven Teil des Targets gestoppt werden können.

Die Notwendigkeit eines aktiven Targets erwächst aus der Forderung, bei einem Verzweigungsverhältnis von 10^{-10} für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Zerfall einen möglichst untergrundfreien Satz von $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Ereignissen isolieren zu können. Dem aktiven Target fallen dabei zwei Aufgaben zu:

- Während der Datennahme ("online") dient das Target dazu, die Triggerrate zu reduzieren. Dazu verlangt man im Trigger, daß einem π -Stoppsignal innerhalb eines Zeitfensters τ ein Zerfallssignal folgt, das aus der Majoritylogik abgeleitet wird (das Hodoskop "sieht" nur die Zerfallsprodukte). Im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Experiment wurde für τ der Wert von 42 ns gewählt, was 1.6 Lebensdauern des Pions entspricht ($\tau_\pi = 26.03$ ns). Damit werden 80% der π Zerfälle erfaßt.
- Bei der Offline Analyse der Daten kann vor allem die Segmentierung des Targets ausgenützt werden. Dazu verlangt man, daß der aus den Kammerdaten rekonstruierte Vertex auf einem Targetzähler liegt, der ein π -Stoppsignal registriert hat. Da i.allg. nur einer der Szintillatoren innerhalb des erlaubten Zeitfensters τ ein solches Signal registriert, erwartet man durch diese Bedingung eine Verbesserung des Signal/Untergrund Verhältnisses um etwa eine Größenordnung (dies gilt nur, falls der Untergrund durch zufällige Prozesse dominiert wird, was in diesem Experiment, wie noch gezeigt werden wird, der Fall ist). Außerdem erlaubt die Messung der Zerfallszeit ($t_{decay} - t_{stop}$) eine unabhängige Überprüfung, ob es sich bei den am Schluß gefundenen Zerfällen tatsächlich um π Zerfälle handelt.

Die Pionen zerfallen in 99.99% der Fälle in ein Myon und ein Myon-neutrino: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Dabei deponiert das Myon im Target 4.1 MeV an kinetischer Energie, falls es innerhalb des Targetmaterials gestoppt wird (etwa 70% der Fälle), und entsprechend weniger, falls es das Target vorher verläßt (zum Vergleich: das Pion aus dem Strahl deponiert typisch 8 MeV kinetische Energie). Dieser Umstand kann nun ebenfalls ausgenützt werden, um die uns nicht interessierenden $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfälle zu unterdrücken und damit die Triggerrate weiter zu verringern. Man muß lediglich die π -Stoppsignale akzeptieren, denen innerhalb eines Zeitraums $\tau_D \approx 3 \cdot \tau_\pi$ nicht ein Zerfall in ein μ folgt. Das μ Zerfallssignal kann aber nur detektiert werden, wenn der Zerfall später als 15 ns³ nach dem π -Stopp stattfindet, da sonst die beiden Signale zu stark

³Die Doppelpulsauflösung der Targetelektronik betrug -je nach Kanal- 14 - 16 ns.

überlappen und nicht mehr als zwei getrennte Signale wahrgenommen werden können. Um auch für diesen Zeitbereich die Möglichkeit zu haben, einen potentiellen $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfall nachzuweisen, muß man die *Form* der Targetsignale untersuchen. Dies läßt sich mit der Methode der "Pulsshape-Analyse" realisieren. Dabei wird das zu untersuchende Signal zweimal digitalisiert, einmal mit einem "schnellen" Gate, das den vorderen Teil des Signals integriert (A_{fast}), und einmal mit einem "langsamen" Gate für den abklingenden Teil des Signals (A_{slow}) (Bild 3.3). Bei

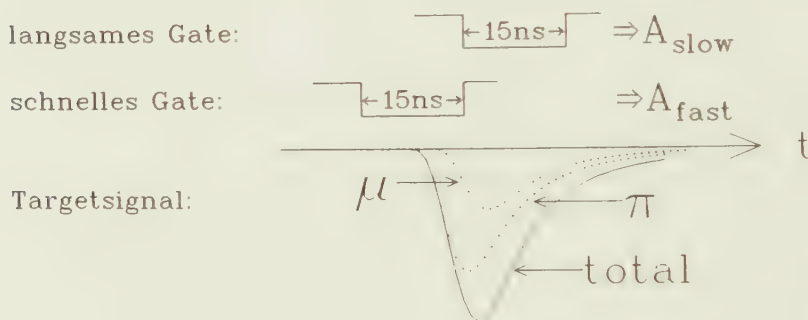


Abbildung 3.3: Analyse der Signalform

einem einzeln auftauchenden Signal (konstante Signalform) liefert das Verhältnis A_{slow}/A_{fast} unabhängig von der Amplitude immer den etwa gleichen Wert. Folgt einem π -Stopsignal ein $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfall, so wird die zusätzlich deponierte Energie hauptsächlich im "langsamen" Gate aufintegriert werden, je nach dem Zeitunterschied zwischen den beiden Ereignissen. Entsprechend wird sich das Verhältnis A_{slow}/A_{fast} (siehe Abschnitt 5.2.3) ändern. Man hat so die Möglichkeit, in der Offline Analyse der Daten diese Information zu benützen, um auch im ersten Teil der π Zerfallskurve "ungültige" π Zerfälle zu identifizieren.

Die sich aus all diesen Überlegungen ergebende Schaltung für die Targetelektronik zeigt Bild 3.4. Um die Signale " π -Stopp" und " μ " zu bilden, bedarf es zweier Strahlteleskopzähler Z_1 und Z_2 . Der Zähler Z_1 ist ein $5 \cdot 300 \cdot 300\text{mm}^3$ großer Szintillator, der am Ausgang des letzten Quadrupols positioniert ist. Zähler Z_2 ist ein zylinderförmiger Szintillator mit einer Dicke von 10 mm und einem Durchmesser von 90 mm, der 3 cm hinter der Spitze des aktiven Targets (in Strahlrichtung gesehen) montiert

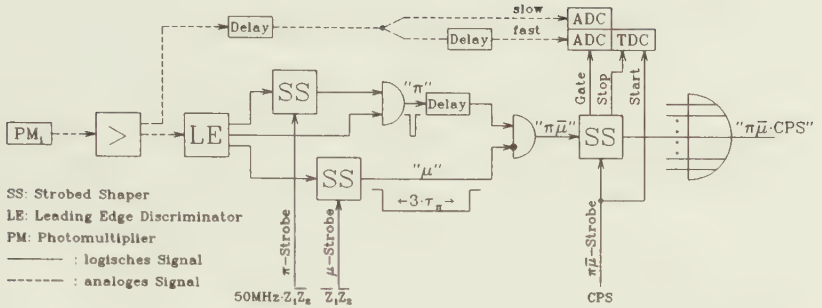


Abbildung 3.4: Detailplan der Targetelektronik

ist. Er wirkt als sogenannter Antizähler. Das π -Stoppsignal wird jetzt als Koinzidenz von Z_1 mit einem der Targetzähler T_i ($i=1$ bis 12) in Antikoinzidenz mit Z_2 gebildet. Außerdem wird das vom Kontrollraum gelieferte 50 MHz Signal benutzt, um auf Grund der Flugzeitinformation die im Strahl vorhandenen μ^+ und e^+ zu unterdrücken (die bei weitgehend geschlossenen Schlitzen⁴ gemessene μ^+ und e^+ Kontamination beträgt beim Impuls von 95 MeV/c jeweils 15%). Entsprechend wird das μ Signal aus T_i in Antikoinzidenz mit Z_1 und Z_2 gebildet. Das $\pi\bar{\mu}$ Signal ergibt sich dann aus dem um τ_D verzögerten π -Stoppsignal in Antikoinzidenz mit dem auf den Wert von τ_D verbreiterten μ Signal. Die Oder-Verknüpfung dieser 12 $\pi\bar{\mu}$ Signale wird jetzt im Trigger in Koinzidenz mit dem Ausgangssignal der CPS Triggerstufe verlangt (Bild 3.5). Die Koinzidenz kann erst nach der zweiten Triggerstufe verlangt werden, da beim Anliegen der $\pi\bar{\mu}$ Signale die CPS-Stufe bereits gestartet wurde. Die Breite und Lage dieses CPS Signals bestimmt dabei, welcher Teil der Zerfallskurve des Pions erfaßt wird. Die Schaltung wurde so ausgelegt, daß ein 15 ns breiter "vorprompter" Bereich und ein 42 ns breiter Bereich auf der Zerfallskurve mitgemessen wurde. Diese Werte ergaben sich als Kompromiß aus den Forderungen nach möglichst geringer Triggerrate einerseits und maximaler Ausbeute an $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Ereignissen andererseits.

Die analogen Targetsignale wurden für die spätere Offline Analyse über ADCs und TDCs ausgelesen. Die dazu benötigten Steuersignale (ein Gate für die ADCs, ein Stoppsignal für die TDCs) wurden ebenfalls aus dem

⁴Die Stellung der Schlitze bestimmt die Strahlintensität.

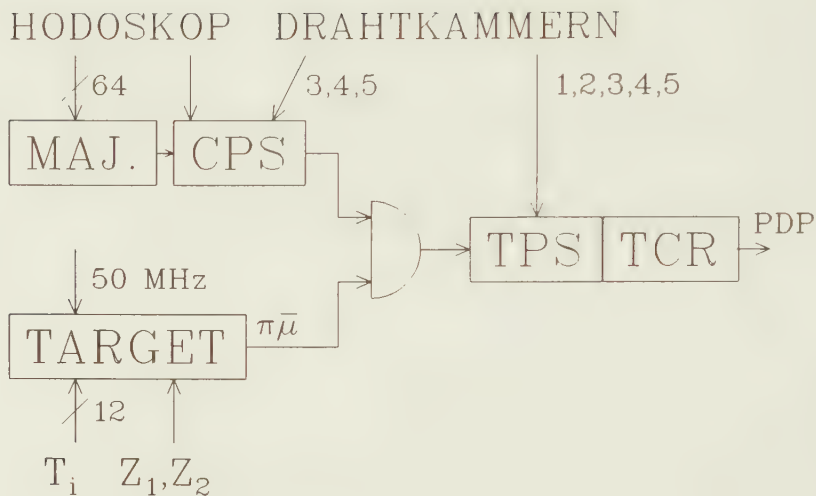


Abbildung 3.5: Übersichtsplan der Triggerlogik

$\pi\bar{\mu}$ Signal abgeleitet.

Kapitel 4

Das Experiment

4.1 Überblick

Das $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiment wurde am SIN im π E3 Areal vom 17. Juli 1985 bis 13. Oktober 1985 durchgeführt. Die Zeit bis Mitte August wurde für Vorbereitungs- und Einstellungsarbeiten am Detektor gebraucht, für die eigentliche Datennahme verblieben also noch 9 Wochen Strahlzeit. In diesem Zeitraum wurden $4.0 \cdot 10^{12} \pi^+$ im aktiven Teil des Targets gestoppt bei einer typischen Stopprate von $1.6 \cdot 10^6 \pi^+/s$. Insgesamt wurden 1555312 Ereignisse auf 149 Datenbänder für die spätere Auswertung gespeichert. Zusätzlich wurde eine Reihe von Magnetbändern bei geänderten Triggerbedingungen geschrieben, die für Eichungen der Detektorkomponenten und zur Überprüfung der korrekten Funktionsweise des Detektors verwendet wurden.

4.2 Das Datenformat und der Online Filter

Sobald ein Ereignis alle Triggerstufen passiert hat, wird dem Online-Computer (PDP 11/44) signalisiert, daß die in der Elektronik zwischengespeicherten Daten ausgelesen werden sollen (für eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Elektronikbausteine siehe [50,51]). Der Computer holt alle Daten zunächst in einen Zwischenspeicher und setzt dann die Elektronik zurück, so daß weitere Ereignisse bearbeitet werden können. Folgende Daten werden vom Computer ausgelesen :

- die Adressen der angesprochenen Anodendrähte aller fünf Kammern. Haben mehrere benachbarte Drähte ("Cluster") angesprochen, so wird nur die Position des Cluster-Zentrums und seine Breite abgespeichert.

- die Adressen und Amplituden der angesprochenen Kathodenstreifen. Es werden nur die Streifen ausgelesen, deren Amplitude einen einstellbaren Wert überschreiten und zusätzlich pro Cluster noch je zwei rechts und links benachbarte Streifen mit einer Amplitude unterhalb der Schwelle. Bereits in der Auslese-Elektronik werden individuell für jeden Streifen Nullpunktskorrekturen ("pedestal subtraction") durchgeführt. Bei der Auslese werden die Daten noch komprimiert, indem nur die 7 höchstwertigen der 12 vom ADC gelieferten Bits abgespeichert werden. Dabei geht keine Information verloren, da die Werte der niederwertigen Bits durch das Rauschen der Elektronik bestimmt werden.
- die Adressen der über das WCRS System (siehe Abschnitt 3.3) ausgelesenen Kathodenstreifen. Auch hier werden nur die Streifen ausgelesen, deren Amplitude einen einstellbaren Schwellenwert überschreitet.
- die Amplituden und Zeiten der 128 Photomultiplier des Hodoskops. Diese Daten werden von einem eigenen Prozessor (LSI 11/23) ausgelesen. Der Prozessor sucht dann nach allen Photomultipliern, bei denen der zugeordnete TDC Baustein ein Stoppsignal erhalten hat, und gibt nur die Amplituden- und Zeitinformation für diese Photomultiplier an den Online-Computer weiter.
- die Amplituden (A_{fast} und A_{slow}) und Zeiten aller 12 Targetzähler. Zusätzlich wird der Strahlteleskop-Zähler Z_1 über einen TDC ausgelesen und ebenso das vom Kontrollraum gelieferte 50 MHz Signal.
- verschiedene Statusinformationen über den Trigger, wie Anzahl der gefundenen Spuren, angesprochene Masken, gefeuerte Sektoren etc.
- der Stand der Zähler. Folgende Signale wurden während des gesamten Experiments gezählt:
 - Ausgang der Majority-Logik
 - "YES"-Ausgang vom CPS
 - Start Signal für den TPS
 - "YES"-Ausgang vom TPS
 - "YES"-Ausgang vom TCR

- Ausgänge der "Meantimer" (ein Meantimer bildet elektronisch den Mittelwert der Zeiten beider Photomultiplier eines Szintillators und kompensiert damit Weglängenunterschiede, siehe [51,55]) von den Szintillatoren Nr. 0,16,32 und 48
- Z_1 in Antikoinzidenz mit Z_2
- die π -Stop und $\pi\bar{\mu}$ Signale der 12 Targetzähler

Um die Datenmenge pro Ereignis nicht unnötig stark aufzublähen, wurde allerdings nur ein Teil der Zähler in jedem Ereignis ausgelesen. Am Ende jeden Run's wurden dann die kompletten Zählerstände auf eine Magnetplatte geschrieben und von dort regelmäßig auf Magnetband überspielt.

Jeder dieser Datensätze wird in einer sogenannten "Bank" abgespeichert. Das gesamte Ereignis wird dann als Summe dieser Datenbanken und einer "Header Bank" zusammengesetzt. Die Header Bank enthält eine individuelle Ereignisnummer, Datum und Zeit, sowie einige den Gesamtstatus des Detektors betreffende Informationen wie die Stärke des Magnetfelds, die Größe der Kammerhochspannungen u.ä.(siehe Abschnitt 4.3).

Das Ereignis kann jetzt auf Band geschrieben werden. Allerdings ist die Triggerrate am Ausgang der letzten Triggerstufe mit etwa 5 Hz immer noch unangenehm hoch (siehe Tabelle 4.1). Daher werden die Ereignisse zuerst noch von einem Programm im Online-Computer gefiltert, das die Daten vom Hodoskop und den Kammerdrähten analysiert. Dieses Programm ist in verschiedene Stufen unterteilt, die der Reihe nach durchlaufen werden. Sobald eine der in den verschiedenen Stufen überprüften Bedingungen vom Ereignis nicht erfüllt wird, wird dieses verworfen. Im einzelnen werden folgende Bedingungen getestet:

- Hat das Ereignis das richtige Format (Hardware Fehler oder Überlauf des Zwischenspeichers)?
- Gibt es mindestens drei verschiedene Cluster im Hodoskop (damit kann die Funktionsweise der Majority-Logik überprüft werden)?
- Gibt es genug positive und negative Spuren?

Zum Test dieser Bedingung wird eine Spursuche gestartet, die auf der Information aller Anodendrähte bei voller Einzeldraht-Auflösung

basiert (die Spursuche im Trigger beruht auf zu Sektoren zusammengefaßten Drähten mit entsprechend reduzierter Ortsauflösung). Der genaue Algorithmus ist in [54] beschrieben. Wie beim Trigger wird dann geschaut, ob die Anzahl der gefundenen positiven und negativen Spuren innerhalb des gewünschten Bereiches liegt. In dieser Stufe werden auch Werte für die Spurparameter in der $r \cdot \phi$ -Ebene (Emissionswinkel, Krümmung und "distance of closest approach"=DCA) berechnet, die die Grundlage der Berechnungen in den folgenden Filterstufen darstellen.

- Enthält das Ereignis keine Rückkehrspur?

Ein Teil der Ereignisse, die bis zu dieser Stufe überlebt haben, enthalten sogenannte Rückkehrspuren, also Spuren die von positiv geladenen Teilchen erzeugt werden, wenn sie den Detektor in umgekehrter Richtung, d.h. vom Hodoskop zum Target und wieder zum Hodoskop, durchlaufen. Sie haben ihre Ursache einerseits in vom Hodoskop zurückgestreuten Positronen, andererseits in aus dem Target herausgestreuten Pionen, die im Hodoskop stoppen und dort über ein Myon in ein Positron zerfallen. Durch diese Rückkehrspuren wird daher ein e^+ und ein e^- simuliert, und zusammen mit der hinführenden e^+ -Spur bzw. einer weiteren zufälligen e^+ -Spur ergibt sich die Signatur eines $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Zerfalls. Diese Ereignisse sind jedoch leicht mit Hilfe der zuvor berechneten Spurparameter zu identifizieren, da der Emissionswinkel der "positiven" Spur (genauer: des späteren Teils der Rückkehrspur) dem Emissionswinkel der "negativen" Spur entgegengesetzt gleich ist und zusätzlich die Krümmung der Spuren übereinstimmt (innerhalb der Auflösung des Detektors). Da diese Bedingung im Prinzip auch von echten $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Ereignissen erfüllt sein kann, wird ebenfalls noch geschaut, ob die Zeitdifferenz der den Spuren zugeordneten Szintillatoren mit der Flugzeit der Rückkehrspuren verträglich ist ($\Delta t \geq 1.7$ ns, während für echte $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Ereignisse gilt: $\Delta t < 1.0$ ns).

- Gibt es mindestens eine "gute" Kombination von zwei positiven und einer negativen Spur?

Dabei ist eine "gute" Kombination definiert durch:

1. alle Spuren haben einen DCA Wert unterhalb 35mm (maximaler Targetradius)

2. alle Spuren haben einen Transversalimpuls unterhalb von 100 MeV
3. die Spuren sind innerhalb eines Zeitfensters von 5 ns prompt
4. die Spuren zeigen auf drei verschiedene Hodoskopcluster
5. die beiden e^+e^- -Kombinationen können *nicht* als Bhabhastreuung eines Positrons in der zweitinnersten Kammer interpretiert werden
6. die Spuren haben eine minimale "Vertexqualität". Die Vertexqualität ist dabei ein Maß dafür, wie sehr die Spuren mit einem gemeinsamen Ursprung verträglich sind. Diese Größe wird ebenfalls aus den Spurparametern abgeleitet (Formeln siehe [54]).

Ereignisse, die alle genannten Bedingungen erfüllen, wurden schließlich auf Band geschrieben. Die Ergebnisse des Filters wurden dabei als "Filter Bank" an das Ereignis angehängt. Insgesamt ergab sich durch diese Vorselektion eine Reduktion der Datenmenge um den Faktor 11. Um die Arbeitsweise des Online Filters in der Offline-Analyse überprüfen zu können, wurde allerdings nach je drei vom Filter akzeptierten Ereignissen das folgende Ereignis unabhängig vom Ergebnis des Filters auf Band geschrieben. Tabelle 4.1 faßt die typischen Reduktionsfaktoren, Entscheidungszeiten und Triggerraten aller Triggerstufen noch einmal zusammen. Die angegebene Stopprate ergibt sich bei einem Protonstrom von $150\mu\text{A}$ und einer Schlitzweite von 1 cm.

Bei diesen Raten erhält man eine Totzeit von 15%, die fast vollständig auf Kosten des Filterprogramms geht. Allerdings würde sich ohne den Filter die etwa gleiche Totzeit durch die mangelnde Leistungsfähigkeit der Magnetbandstationen ergeben.

4.3 Einstellung und Überwachung der Detektorkomponenten

Um das Experiment reibungslos durchführen zu können, müssen die einzelnen Detektorkomponenten eingestellt und aufeinander abgestimmt werden:

- Der Strahl:

Tabelle 4.1: Triggerraten, Reduktionsfaktoren und Entscheidungszeiten bei $1.6 \cdot 10^6$ gestoppten π^+ pro Sekunde

Stufe	Ausgangsrate (Hz)	Red. Faktor	Entscheidungszeit
Majority	10^4	160	20 ns
CPS	$1.4 \cdot 10^3$	7	180 ns
CPS- $\pi\bar{\mu}$	$2 \cdot 10^2$	7	20 ns
TPS	8	25	$2.5\mu s$
TCR	5	1.6	$5\mu s$
Online Filter	0.5	11	30 ms
Target			
$Z_1 \cdot Z_2$	$11 \cdot 10^6$	-	30 ns
" π -Stopp"	$2.3 \cdot 10^6$	5	20 ns
$\pi\bar{\mu}$	$1.6 \cdot 10^6$	1.4	90 ns

Der Impuls des Pionstrahls und die Dicke des Degraders müssen so aufeinander abgestimmt werden, daß sich eine maximale Stoppdichte im aktiven Teil des Targets bei möglichst geringer bzw. gerade noch verträglicher Triggerrate ergibt. Dazu wurde die $\pi\bar{\mu}$ -Rate (normiert auf den Protonenstrom) optimiert als Funktion des Stroms durch die Fokussier- und Ablenkmagnete und der Dicke des Degraders. Für den Impuls des Strahls ergab sich damit der Wert von 95 MeV/c bei einer Degraderdicke von 23 mm (Delrin mit einer Dichte von 1.42g/cm^3). Die die Strahlintensität begrenzenden Schlitze im Strahlkanal wurden dann so eingestellt, daß die Triggerrate unter dem Wert von 6 bis 7 Hz blieb, was einer gerade noch akzeptablen Totzeit von 15% entspricht. Während der eigentlichen Datennahme wurden die Schlitze automatisch an die sich ändernde Intensität des Protonenstromes angepaßt, so daß die effektive Stopprate auf einem konstanten Wert gehalten werden konnte.

• Das Hodoskop:

Zunächst wurden die Hochspannungen aller 128 Photomultiplier abgeglichen. Dazu wurden die Amplitudenspektren für Michel-Positronen¹ aufgenommen und die Hochspannung dann so einge-

¹ Als Michel-Positronen bezeichnet man die Positronen aus dem $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ Zerfall, die ein charakteristisches Energiespektrum mit einem Endpunkt bei $m_\mu c^2/2$ liefern.

stellt, daß das Maximum der sich ergebenden Landauspektren jeweils an der gleichen Stelle zu liegen kam. Während des Experiments wurden alle Hochspannungen in Intervallen von drei Minuten von einem Personalcomputer "Victor" überprüft und auf eine Genauigkeit von $\pm 2V$ konstant gehalten. Die Schwellen der angeschlossenen Diskriminatoren wurden auf 50 mV eingestellt (die Rauschamplitude betrug 10 mV, die mittlere Amplitude bei einem Teilchendurchgang 200 mV). Die Schwellenspannung wurde von einem Digital/Analog Konverter (DAC) für alle Diskriminatoren gemeinsam geliefert und konstant gehalten. Die Kabellängen wurden mit einer Genauigkeit von $\pm 0.5ns$ so aufeinander abgeglichen, daß folgende Bedingungen erfüllt waren:

- Teilchendurchgänge in der Mitte jeden Szintillators führen zu Signalen an den beiden Photomultipliern, die gleichzeitig an den Eingängen des Meantimers anliegen.
- Gleichzeitige Teilchendurchgänge in zwei verschiedenen Szintillatoren führen zu Signalen am Ausgang der Meantimer, die gleichzeitig am Eingang der Majority-Logik anliegen.

Dieser Abgleich ist notwendig, um bereits auf der Stufe der Majority-Logik elektronisch ein enges Zeitfenster von 5 ns verlangen zu können und so die Triggerrate so niedrig wie möglich zu halten. Schließlich wurde für jeden Photomultiplier der Zeitnullpunkt in den TDC Spektren gemessen und diese Werte in den LSI 11/23 Prozessor eingegeben, um bereits bei der Auslese die Nullpunktskorrektur vornehmen zu können. Die Eichung aller TDCs wurde bestimmt, indem eine Reihe definierter Verzögerungen zwischen den Start- und Stoppsignalen vorgegeben wurde und die resultierenden TDC-"counts" gemessen wurden. Die Eichfaktoren wurden allerdings erst bei der Offline Analyse verwertet.

Die Majority-Logik liefert ein Ausgangssignal, dessen Amplitude proportional zur Anzahl Cluster im Hodoskop ist. Eine von außen vorgebbare Schwelle bestimmt dann die minimale Anzahl Cluster, die für den Trigger verlangt werden. Diese Schwelle wurde ebenfalls von einem DAC geliefert und während der normalen Datennahme, bei der Ereignisse mit drei Clustern gesucht werden, so eingestellt, daß gerade noch ein kleiner Teil von Ereignissen mit nur

zwei Clustern triggerte. Die Stabilität der Schwelle wurde kontinuierlich überprüft, indem die Anzahl von Ereignissen mit zwei Clustern im Filter gezählt wurden.

- Die Kammern:

Hier galt es, die Nachweiswahrscheinlichkeit für den Durchgang geladener Teilchen zu optimieren. Dazu wurde die Hochspannung der Kammern auf den höchsten mit einem sicheren Betrieb der Kammern verbundenen Wert eingestellt (1920 V, 1930 V, 2680 V, 2700 V, 2810 V). Die Schwelle für die Amplitude auf den Anoden wurde auf den niedrigsten Wert eingestellt, der mit einem schwingungsfreien Betrieb der Elektronik vereinbar war. Dann wurde die Breite und Lage des Anoden- und Kathodengates optimiert (Anodengate 70 ns, Kathodengate 80 ns Breite). Die Nachweiswahrscheinlichkeit wurde mit den im Filter gefundenen Rückkehrspuren gemessen und so auch während der Datennahme ständig überwacht (siehe auch Abschnitt 5.2.5). Zusätzlich wurden die Werte der Hochspannungen alle zwei Minuten vom Personalcomputer "Victor" gelesen, mit den Sollwerten auf eine Toleranz von ± 10 V verglichen und zum Online Computer gesendet, wo diese Daten für jedes Ereignis in die Header Bank geschrieben wurden. Die Verdrehung der Kammern wurde mit Teilchendurchgängen aus der kosmischen Strahlung (bei abgestelltem Magnetfeld) gemessen. Sie war für alle Kammern weniger als ein halber Drahtabstand und wurde daher nur bei der Offline Analyse berücksichtigt. Schließlich wurden die Anodendraht- und Kathodenstreifen-Profile in regelmäßigen Abständen gemessen, um eventuell abgerissene Stecker oder tote Kanäle zu lokalisieren.

- Der Trigger:

Für die Erzeugung der Triggermasken im CPS und im TPS wurden vom Detektor bei einem um den Faktor m_μ/m_π reduzierten Magnetfeld gemessene Spuren von Michel-Positronen verwendet (Der Faktor m_μ/m_π entspricht dem Verhältnis der Maximalimpulse des e^+ im $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall). Die Masken der negativen Spuren wurden durch eine Messung bei einem Magnetfeld mit umgekehrter Polarität bestimmt.

- Das Target:

Ähnlich wie beim Hodoskop wurden zunächst die Hochspannungen der Photomultiplier abgeglichen, wozu die Amplitudenspektren von Pionen, die das Target durchdringen, verwendet wurden. Dabei war es entscheidend, daß die Hochspannungen relativ niedrig eingestellt wurden, da andernfalls die "Pulsshape-Analyse" durch Sättigungseffekte in den Photomultipliern verfälscht worden wäre. Die Schwelle vom Teleskopzähler Z_1 wurde so eingestellt, daß nur durchfliegende π^+ und μ^+ , nicht aber e^+ triggerten. Zähler Z_2 triggerte dagegen auch auf Positronen. Die Schwelle für die Targetzähler wurde so eingestellt, daß Teilchen triggerten, die mehr als 1.5 MeV Energie deponierten. Die Lage des jeweils 15 ns breiten "schnellen" und "langsamen" Gates (siehe Abschnitt 3.3) relativ zum Targetsignal wurde so gewählt, daß das Verhältnis A_{fast}/A_{slow} ungefähr 1 betrug. Um die logischen Signale vom CPS und von der Targetelektronik zeitlich aufeinander abstimmen zu können, wurde auf Ereignisse getriggert, bei denen das Signal im Targetzähler vom Zerfallspositron selber erzeugt wurde (wenn es z.B. in tangentialer Richtung das Target durchquert und dabei viel Energie deponiert) und so einen "prompten" Prozeß simuliert.

- Der Online Filter:

Das Filterprogramm muß zunächst in einer "Trainingsphase" lernen, wie richtige Spuren aussehen. Dazu wurden genau wie beim Trigger Spuren von Michel-Positronen bei reduziertem Magnetfeld und bei beiden Polaritäten des Magnetfelds gemessen. Die Spursuche im Filter beruht auf sogenannten Korrelationsfunktionen, die als Linearkombinationen der Drahtadressen der fünf Kammern gebildet werden. Vereinfacht ausgedrückt gilt eine Spur dann als gefunden, wenn die ihr zugeordneten Drahtadressen Werte für die Korrelationsfunktionen liefern, die alle innerhalb eines bestimmten Wertebereichs liegen. Die Aufgabe der Trainingsphase ist es jetzt, diese Wertebereiche zu definieren. Außerdem werden die Grenzwerte für die Spurparameter (DCA und Krümmung) und die zur Unterdrückung der Rückkehrspuren benötigten Grenzwerte für die Differenz der Spurparameter (Krümmung und Richtung) festgelegt.

Der Gesamtzustand des Detektors wurde hauptsächlich über den Online Computer gesteuert und überwacht. So konnte man über ein Terminal die Triggerbedingungen variieren, indem man Steuerbits in der Elek-

tronik setzte bzw. zurücksetzte, die Schwellenspannung für die Majority variierte (ein, zwei oder drei Hodoskop-Cluster), die erlaubten Bereiche für die Anzahl gefundener Spuren im Trigger und im Filter einstellte oder festlegte, welche der Filterstufen das Ereignis verwerfen durften. So konnte man statt der normalen Triggerbedingungen (zwei e^+ und ein e^- mit einem "Hit" im Target) verlangen, daß beispielsweise auf Einzelspuren, Rückkehrspuren, Bhabha-Ereignisse² oder auf das Hodoskop alleine getriggert wurde. Dadurch konnten jederzeit eine Reihe von "Spezial-Runs" gestartet werden, die es erlaubten, die Zeiteichung durchzuführen (Bhabha-Run), Kammerverdrehungen zu messen (Cosmic-Run), das Magnetfeld zu eichen (Michel-Run) oder die Kathodenkanäle zu kalibrieren (Pulser-Run).

Während der normalen Datennahme diente die Häufigkeitsverteilung der durchlaufenen Filterstufen gewissermaßen als Fingerabdruck des Gesamtzustandes des Detektors, da beinahe jede Fehlfunktion einer Detektorkomponente drastische Änderungen in dieser Verteilung bewirkt. Diese Verteilung wurde daher zusammen mit den kompletten Zählerständen am Ende jedes Runs ausgedruckt.

Der Personalcomputer "Victor" hatte zusammen mit einer am SIN entwickelten Steuer- und Überwachungselektronik (W. Rüegg) die Aufgabe, den "externen" Zustand des Detektors zu überprüfen. Im einzelnen wurden folgende Größen überwacht:

- die Hochspannungen der Kammern (alle 10 Sekunden)
- die Strombegrenzungsanzeigen der Hochspannungsversorgung der Kammern
- die Hochspannung aller Photomultiplier (Hodoskop, Target und Strahlteleskop)
- das Magnetfeld
- der Protonenstrom

²Bhabha Ereignisse sind solche, in denen ein Positron durch Bhabhastreueung ein Elektron aus der Hülle eines Atoms herausschlägt und ihm dabei so viel Energie verleiht, daß dieses das Hodoskop erreichen kann. Diese Ereignisse sind durch ein e^+e^- -Paar mit kleinem Öffnungswinkel zwischen den Spuren charakterisiert und führen im allgemeinen dazu, daß in zwei verschiedenen Szintillatoren gleichzeitig (bis auf Flugzeitunterschiede) Energie deponiert wird.

- die Werte von zehn Temperaturfühlern an sensitiven Stellen des Detektors
- der Gasfluß durch jede der Kammern
- die Gaskonzentration außerhalb des Spektrometers
- die Spannungsversorgung aller direkt am SINDRUM Detektor befindlichen Elektronik

Alle Abweichungen von vorher festgelegten Sollwerten wurden akustisch und optisch angezeigt und zur Dokumentation auf einem Drucker ausgegeben. Beim Ausfall wichtiger Komponenten wurde die Messung unterbrochen und automatisch fortgesetzt, sobald der Fehler behoben war. Falls die Gaskonzentration außerhalb des Spektrometers einen kritischen Wert überschritt, wurde sofort die gesamte Gaszufuhr gestoppt und alle Kammerhochspannungen abgeschaltet.

Kapitel 5

Die Offline-Analyse der Daten

5.1 Übersicht

Die Aufgabe der Offline-Analyse bestand darin, aus den 1.5 Millionen auf Band gespeicherten Ereignissen die Kandidaten für $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfälle herauszufiltern und dabei Untergrundprozesse so stark wie möglich zu unterdrücken. Diese Aufgabe wurde gelöst, indem zunächst durch eine Reihe einfacher Bedingungen die Anzahl der Ereignisse schrittweise reduziert wurde, so daß auf diese verkleinerte Ereignismenge kompliziertere Berechnungen unter Ausnützung der kompletten Information aller Detektorkomponenten bei entsprechend erhöhtem Rechenaufwand angewendet werden konnten. Folgende Stufen wurden durchlaufen:

- Die $r \cdot \phi$ Auswertung:

In dieser Stufe wurden nur die in der $r \cdot \phi$ -Projektion gegebenen Informationen (Hodoskop und Drahtadressen) ausgenutzt. Es wurde die Analyse des Online-Filters bei geändertem Algorithmus für die Spurfindung und den Spurfit [56] mit engeren Bedingungen für die Zeitdifferenz (3 ns statt 5 ns) und die Vertexqualität (siehe Abschnitt 4.2) wiederholt. Dabei konnte die Arbeitsweise des Filters durch die Analyse der ungefiltert akzeptierten Ereignisse (25%) überprüft werden. Insgesamt wurden 37% der Ereignisse in dieser Analysestufe akzeptiert bei einem mittleren Rechenaufwand von 20 ms CPU Zeit (VAX 8650) pro Ereignis.

- Die $r \cdot \phi \cdot z$ Auswertung:

Hier wurde zum ersten Mal die Information aus der Kathodenstreifenauslese verwendet. Zunächst wird für jeden auf den Kathodenstreifen gefundenen Cluster der Ladungsschwerpunkt be-

stimmt [50,56,57]. Aus der Kombination der Schwerpunkts-Koordinaten von Innen- und Außenkathode läßt sich dann ein mögliches z - ϕ Koordinatenpaar des Teilchendurchgangs bestimmen. Stimmt die ϕ -Koordinate mit einem der angesprochenen Anodendrähte überein, so wird die entsprechende z -Koordinate dem Hit in der $r \cdot \phi$ -Ebene zugeordnet. So können für jede in der $r \cdot \phi$ -Projektion gefundene Spur bis zu vier z -Koordinaten ermittelt werden. Für "echte" Spuren müssen diese Koordinaten in der s - z -Ebene (s =Bogenlänge) eine Gerade bilden (die Form der Spur ist in einem homogenen Magnetfeld eine Helix mit der Symmetrieachse parallel zur Richtung des Magnetfelds (=z-Achse), die z -Koordinate hängt daher linear mit der Bogenlänge s auf dieser Helix zusammen). Spuren, deren z -Koordinaten diese Bedingung nicht erfüllen, und solche, denen weniger als zwei z -Koordinaten zugeordnet werden können, werden verworfen. Etwa 20% der in der $r \cdot \phi$ -Projektion gefundenen negativen Spuren stellten sich dabei als "unechte" Spuren heraus, die z.B. durch mehrere benachbarte positive Spuren simuliert wurden. Anschließend wurde die gleiche Analyse wie in der $r \cdot \phi$ -Stufe mit dem jetzt geänderten Satz an gefundenen Spuren wiederholt. Für Kombinationen von zwei positiven und einer negativen Spur, die alle bisherigen Bedingungen erfüllten, wurde ein schneller Vertexfit [56] auf der Basis der kompletten Spurparameter aller drei Spuren durchgeführt. Als Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß die drei Spuren einem gemeinsamen Punkt im Raum entspringen, wurde eine χ^2_{ν} Größe (vergleiche auch Anhang A) berechnet. Sobald eine Kombination mit einem χ^2_{ν} unterhalb eines Maximalwerts (=30) gefunden wurde, wurde das Ereignis akzeptiert. In dieser Stufe wurden noch 11.5% der verbliebenen Ereignisse akzeptiert, wobei der entscheidende Unterdrückungsfaktor vom Vertexfit stammte. Der Rechenaufwand pro Ereignis betrug dabei im Mittel 80 ms CPU Zeit (VAX 8650).

- Der korrelierte Target-Vertex Fit:

Für die restlichen 66810 Ereignisse wurde der Spurfit und der Vertexfit verfeinert. Der Spurfit wurde jetzt unter Berücksichtigung des Energieverlustes und der Vielfachstreuung in den Kammern durchgeführt. Im Vertexfit wurde die volle Kovarianzmatrix der Spurparameter in die Berechnung aufgenommen und explizit verlangt, daß

der Vertex auf dem aktiven Teil des Targets lag, wobei ebenfalls Energieverluste und Vielfachstreuung im Targetmaterial berücksichtigt wurden (siehe Abschnitt 5.3.2 und Anhang A). Außerdem wurde verlangt, daß der Vertex auf einem der angesprochenen Targetzähler lag. So verblieben am Schluß 745 prompte Ereignisse mit einem guten Vertex und einem korrelierten π -Stoppsignal. Der durchschnittliche Rechenaufwand betrug hier allerdings 1 s CPU Zeit pro Ereignis.

Die Endauswertung dieser 745 Ereignissen wird im Kapitel 7 beschrieben. Hier soll zunächst auf die Eichung des Detektors, den Spur- und Vertexfit sowie die Bestimmung der absoluten Normierung genauer eingegangen werden.

5.2 Die Eichung des Detektors

Bevor die Auswertung der Daten beginnen konnte, mußten die einzelnen Detektorkomponenten geeicht werden. Die Eichung wurde regelmäßig überprüft, um etwaige Veränderungen oder Alterungseffekte im Detektor oder der Elektronik zu kompensieren. Dazu wurden meistens Daten von speziellen Eich-Runs benutzt, aber auch die Daten der normalen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Runs selber.

5.2.1 Position der Kammern

Es wurden bei abgeschaltetem Magnetfeld die Spuren von Teilchen aus der kosmischen Strahlung gemessen (Cosmic-Run) und damit die folgenden Korrekturgrößen bestimmt:

- Verdrehung des Anodenzylinders gegenüber der Sollposition (Die Sollposition wird relativ zur äußersten Kammer definiert.)
- Verdrehung des äußeren gegenüber dem inneren Kathodenzylinder (für Kammern mit z-Auslese)
- Verschiebung der Kammer entlang der z-Koordinate gegenüber der Sollposition (ebenfalls relativ zur äußersten Kammer)

Die größten Korrekturen mußten dabei für Kammer 1 vorgenommen werden mit einer Verdrehung von 13 mrad (27% des Drahtabstands) und einer Verschiebung entlang der z-Achse von -3.4 mm.

5.2.2 Das Hodoskop

Bereits im Abschnitt 4.3 wurde der Abgleich der zeitkritischen Elemente in der Hodoskop Elektronik sowie die Bestimmung der Zeitnullpunkte besprochen. Das Verfahren zur Bestimmung der relativen Zeitnullpunkte der 128 Photomultiplier wurde in der Offline Analyse mit größerer Genauigkeit wiederholt, und zwar auf der Basis spezieller "Bhabha-Runs" und der in den normalen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Datenbändern gefundenen Bhabha-Ereignisse (siehe Fußnote S.40). Etwa alle zehn Runs wurden die Zeitnullpunkte neu festgelegt, um kleinere Schwankungen in der Elektronik auszugleichen. Für eine optimale Zeitauflösung war es entscheidend, den "Walkeffekt" mit Hilfe der mitgemessenen Pulshöhen in den Photomultipliern zu kompensieren. Auf Grund der endlichen Anstiegszeit der Signale wird nämlich ein Signal mit niedriger Amplitude die Diskriminatorschwelle später überschreiten als ein Signal mit größerer Amplitude. Diese Zeitdifferenz (bezogen auf ein hypothetisches Signal mit unendlicher Amplitude) wird als "Walk" bezeichnet. Die Abhängigkeit des Walk (W) von der Amplitude (A) wurde aus denselben Bhabha-Ereignissen wie oben empirisch bestimmt. Dabei wurde auf eine individuelle Walkkorrektur mangels einer ausreichenden Anzahl von Ereignissen verzichtet, und nur eine mittlere, für alle Photomultiplier gleiche Walkkorrektur durchgeführt. Die Walkkorrektur konnte wie folgt parametrisiert werden:

$$W = \alpha \cdot e^{-A/\beta} \text{ mit } \alpha = 2.7 \text{ ns und } A/\beta = 0.25 \dots 3.0$$

Bild 5.1 zeigt die bei Anwendung aller Korrekturen (TDC' Eichfaktoren, Nullpunkts-, Walk- und Flugzeitkorrektur) erreichte Zeitauflösung am Beispiel der Zeitdifferenz der "Meantimes"¹ zweier Szintillatoren für Bhabha-Ereignisse. Die Breite der Verteilung entspricht einer Zeitauflösung eines einzelnen Photomultipliers von 260 ps (σ).

5.2.3 Das Target

Wie beim Hodoskop wurden für die Zeitmessung die TDCs geeicht, eine Walkkorrektur empirisch bestimmt und die Zeitnullpunkte der 12 Targetzähler relativ zur Zeitmessung im Hodoskop festgelegt. Dazu wurden Ereignisse selektiert, bei denen ein Positron das Target in tangentialer Richtung verläßt und so genug Energie deponieren kann, daß ein Targetzähler anspricht. Diese "prompten" Ereignisse erlauben es daher, die

¹Mittelwert der Zeiten beider Photomultiplier eines Szintillators

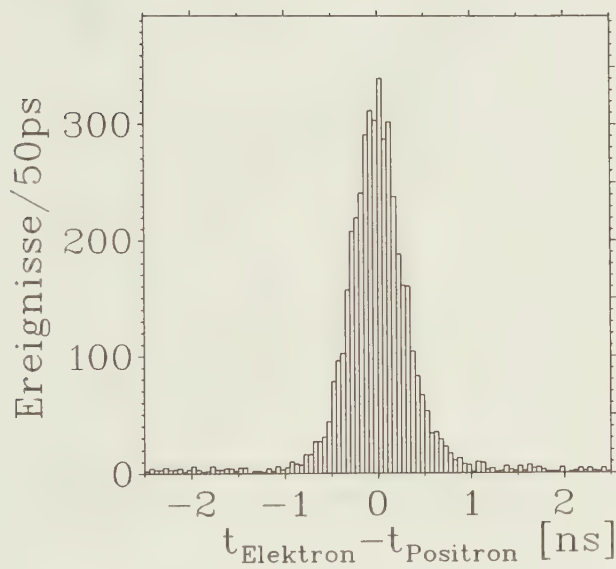


Abbildung 5.1: Verteilung von $t_e - t_{e^+}$ für Bhabha-Ereignisse

Zeitmessung im Target mit der Zeitmessung im Hodoskop direkt zu vergleichen und aufeinander abzustimmen. Es konnte eine Zeitauflösung von 620 ps (σ , ohne z-Korrektur) erreicht werden.

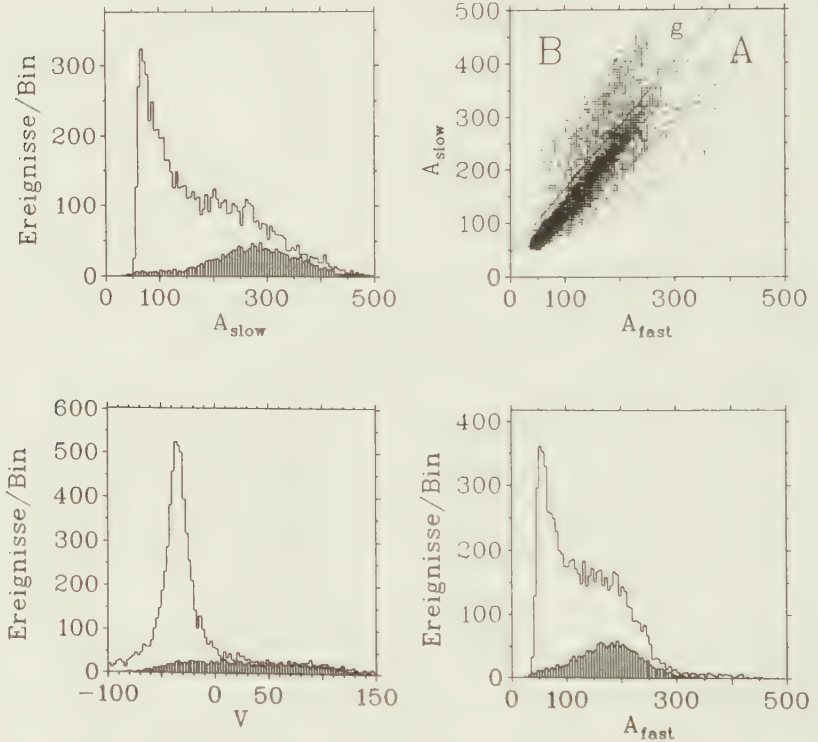


Abbildung 5.2: Verteilung der Größen A_{fast} , A_{slow} und V für Targetzähler 1. Die simulierten π -Stop Ereignisse mit anschließendem $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfall sind schraffiert gekennzeichnet.

Bild 5.2 zeigt die für einen Targetzähler gemessene Verteilung der "schnellen" Amplitude (A_{fast}) gegenüber der "langsamen" Amplitude (A_{slow}) für die auf Band geschriebenen Ereignisse. Man kann deutlich zwei Bereiche unterscheiden:

- Im Bereich A stehen A_{fast} und A_{slow} in einem festen Verhältnis. Dies sind also Ereignisse, bei denen die Pulsform im Target nicht durch ein weiteres Signal verfälscht wurde.

- Im Bereich B ist dagegen im langsamen Gate zusätzliche Ladung aufintegriert worden (zusätzliche Energie deponiert worden). Bei diesen Ereignissen handelt es sich um π -Stop Signale, denen ein $\pi \rightarrow \mu\nu$ Zerfallssignal innerhalb der Doppelpulsauflösung von 15 ns folgt. Als Maß für die "Verzerrung" V des Targetsignals wird jetzt für jedes Ereignis der Abstand des Punktes in der $A_{fast} - A_{slow}$ Ebene zur Geraden g (Steigung m , Achsenabschnitt n) bestimmt, wobei die Gerade g durch die Ereignisse mit unverzerrter Signalform definiert wird:

$$V \equiv A_{slow} - m \cdot A_{fast} - n$$

Die Verteilung für diese Größe ist in Bild 5.2 zu sehen, zusammen mit einer Monte Carlo Simulation für echte π - *Stoppereignisse*, denen innerhalb der Doppelpulsauflösung der Elektronik ein $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ Zerfall folgt. Die Lage der Geraden wurde für jeden Targetzähler getrennt festgelegt und während der gesamten Datennahme regelmäßig überwacht. Aus der Verteilung von V erkennt man, daß ein Großteil der " π - *Stop*" Signale nicht von wirklich gestoppten Pionen stammt, sondern zum Teil von durchfliegenden Pionen, die am Antizähler Z_2 vorbeigestreut wurden und zum Teil von den schon erwähnten prompten Ereignissen. Diese Ereignisse sind auch die Ursache für die Erhöhung der Amplitudenspektren bei niedrigen Amplituden (siehe auch Abschnitt 5.4.2).

5.2.4 Das Magnetfeld

Die Größe des Magnetfeldes B wurde auf zwei verschiedene Arten gemessen:

- aus der Energieverteilung des e^+ im $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ -Zerfall (Michel-spektrum); diese Verteilung hat den Endpunkt bei einer Energie von $E = m_\mu c^2 / 2 = 52.8 \text{ MeV}$ (Bild 5.3).
- aus der Verteilung der Größe $K = \sum_{i=1}^3 E_i + |\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c|$ (der Index bezeichnet die drei geladenen Teilchen) für selektierte $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Zerfälle, die ihren Endpunkt bei der Energie $E = m_\mu c^2 = 105.6 \text{ MeV}$ hat (Bild 5.4).

Dabei wurden die Datenspektren mit den entsprechenden Spektren von simulierten Ereignissen ("Monte Carlo" Ereignisse, siehe Kapitel 6.1) verglichen und ein χ^2 -Fit mit dem Magnetfeld als freiem Parameter

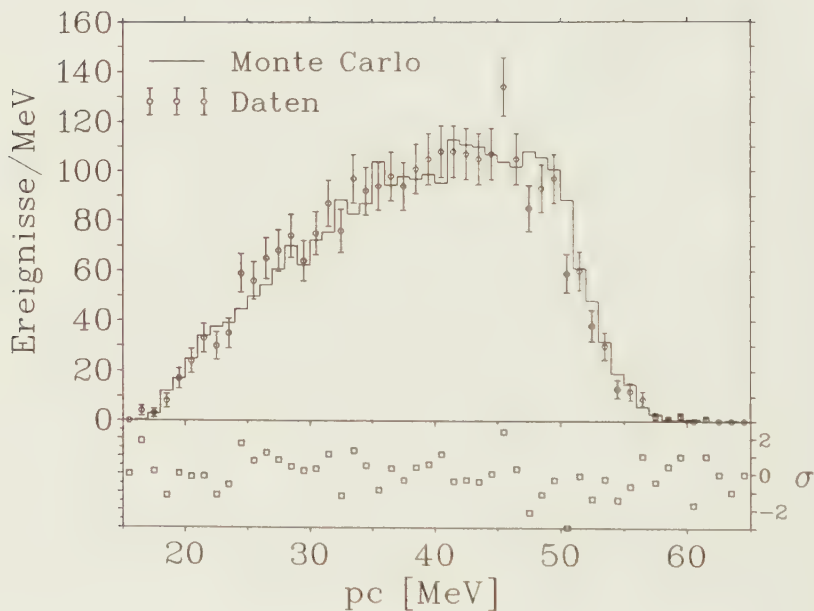


Abbildung 5.3: Impulsverteilung für Michel-Positronen und simulierte Verteilung mit $B = 3.36$ kG. Im unteren Kasten ist die Differenz σ der Daten- und Monte Carlo Spektren in Einheiten des erwarteten Fehlers aufgetragen.

durchgeführt. Es ergaben sich die Werte 3.37 ± 0.02 kG bzw. 3.35 ± 0.02 kG. In der Auswertung wurde deshalb mit einem Wert von 3.36 kG gerechnet.

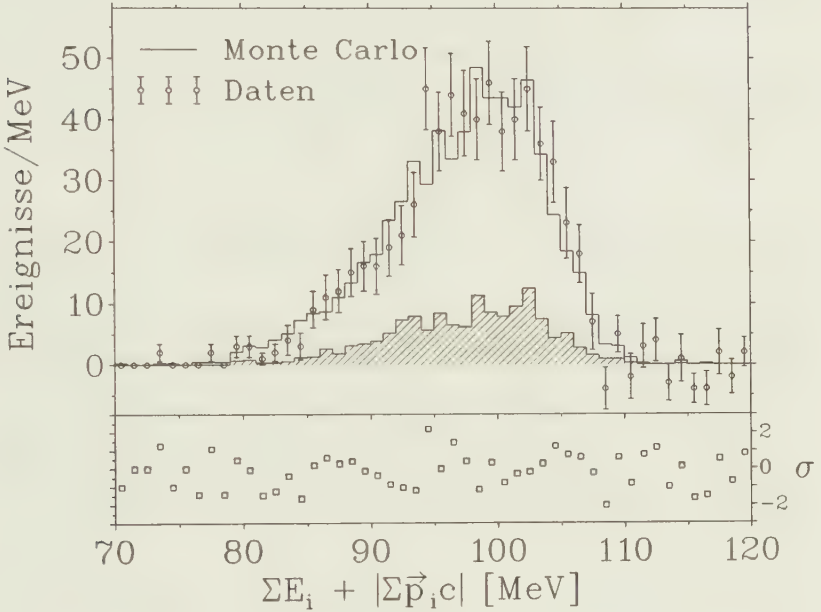


Abbildung 5.4: Verteilung von K für $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse und simulierte Verteilung mit $B=3.36$ kG. Schraffiert gekennzeichnet sind $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \gamma$ Ereignisse mit extern konvertierten Photonen.

5.2.5 Die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Kammern

Die Nachweiswahrscheinlichkeiten ε_i der Kammern für Teilchendurchgänge wurde aus Rückkehrspuren bestimmt. Für jede vom Filter gefundene Rückkehrspur wurde der "negative" Spurteil vollständig im Raum rekonstruiert und daraus der Verlauf des "positiven" Spurteils innerhalb des Detektors vorhergesagt. Anschließend wurde geschaut, ob eine positive Spur rekonstruiert werden konnte, die mit dem vorhergesagten Spurverlauf verträglich war. Aus der Anzahl der für diese Spur gefundenen Hits in der $r \cdot \phi$ und der $r \cdot z$ Projektion konnten dann die

Nachweiswahrscheinlichkeiten berechnet werden (Tabelle 5.1). Dabei ist

Tabelle 5.1: Nachweiswahrscheinlichkeiten der Kammern in der $r \cdot \phi$ und $r \cdot z$ Projektion. Die Größe ε_z enthält $\varepsilon_{r\phi}$ implizit, da ein z -Hit zu einer Spur nur dann zugeordnet wurde, wenn der entsprechende $r\phi$ -Hit nachgewiesen wurde.

Kammer	$\varepsilon_{r\phi}$ [%]	ε_z [%]
1	95.4 ± 0.3	87.0 ± 0.6
2	99.0 ± 0.2	92.6 ± 0.4
3	98.8 ± 0.2	86.8 ± 0.6
4	96.1 ± 0.3	-
5	99.0 ± 0.2	89.9 ± 0.5

zu beachten, daß die Werte für ε_z von der Topologie des Ereignisses und der Gesamtanzahl der Spuren abhängen. Die hier angegebenen Werte gelten also strenggenommen nur für isolierte Spuren bei Ereignissen mit drei Spuren. Die schlechte Nachweiswahrscheinlichkeit in der $r \cdot z$ Projektion für die Kammern 3 und 5 hat ihre Ursache darin, daß das WCRS-System in 6.0% der Ereignisse aus unbekannter Ursache überhaupt keine Signale lieferte.

5.3 Der Spurfit und der Vertexfit

Für den Spurfit wurde ein neuer Algorithmus angewendet, der es erlaubte, den Einfluß der Vielfachstreuung und des Energieverlustes in den Kammern zu berücksichtigen (für den in der $r\phi z$ Analysestufe verwendeten Algorithmus siehe [56]). Dieser Spurfit schaffte die Voraussetzungen, um im anschließenden Vertexfit eine optimale Auflösung für die Spur und Vertexparameter zu erhalten. Dieser Zusatzaufwand war aus zwei Gründen gerechtfertigt:

- Eine gute Vertexauflösung ist für eine effektive Unterdrückung des zufälligen Untergrunds entscheidend.
- Für die Likelihood-Analyse (siehe Abschnitt 7.3) müssen die Spurparameter zusammen mit ihren Kovarianzmatrizen *am Vertex* berechnet werden. Der schnelle Vertexfit der $r\phi z$ -Analysestufe liefert diese Information nicht.

In den folgenden beiden Abschnitten soll daher genauer auf die verwendeten Methoden eingegangen werden, wobei die mathematischen Details dem Anhang A zu entnehmen sind. (siehe auch [58,59,60]).

5.3.1 Der Spurfit

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m in einem Magnetfeld B ist durch die Lorentzgleichung gegeben:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{q}{m} \left[\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B}(\vec{x}) \right]$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung enthält fünf Integrationskonstanten, so daß jede Spur durch fünf Parameter α_i beschrieben werden kann. Im Falle eines homogenen (ortsunabhängigen) Magnetfelds ist die Spur eine Helix. Die für die Helix gewählte Parametrisierung ist im Anhang A beschrieben. Der Detektor liefert nun bei einer Reihe von Referenzzylindern (=Anodenzylinder) die Koordinaten c_i ($i=1 \dots N$) der Durchstoßpunkte einer Spur. Dies sind im SINDRUM Detektor maximal fünf ϕ -Koordinaten und vier z -Koordinaten. Die Aufgabe des Spurfits ist es, die Spur zu finden, die mit den gemessenen Koordinaten am besten verträglich ist. Dazu wird ein Spurmodell benötigt, das in Abhängigkeit der fünf Spurparameter Vorhersagen für die Durchstoßpunkte macht (f_i). Die "gefittete" Spur ist dann diejenige, deren Spurmodell die Größe

$$Q^2(\vec{\alpha}) = (\vec{c} - \vec{f}(\vec{\alpha}))^* W (\vec{c} - \vec{f}(\vec{\alpha}))$$

minimiert. Dabei ist W eine Gewichtsmatrix, die von den Ortsauflösungen der Kammern abhängt. Im einfachsten Fall (die Auflösung ist von den Spurparametern unabhängig, und es gibt keine Vielfachstreuung) ist die Matrix W diagonal, das heißt, es gibt keine Korrelationen zwischen den Meßpunkten. Die Vielfachstreuung führt nun aber zu Korrelationen zwischen aufeinanderfolgenden Koordinaten. Um sie mitzuberechnen, wurde die sogenannte "Parametrisierungsmethode" gewählt. Das Spurmodell wird dabei durch je zwei Streuwinkel pro Streuebene erweitert, und die gesamte Spur wird aus einzelnen Helixstücken zusammengesetzt. An den Übergangsstücken kann zusätzlich der Energieverlust im Material berücksichtigt werden. Beim SINDRUM Detektor sind die Streuebene die Kammern selber, der Einfluß der Luft zwischen den Kammern wird vernachlässigt. Man kann zeigen, daß sich die Vielfachstreuung jetzt

durch eine geänderte, *nichtdiagonale* Gewichtsmatrix W_{MS} beschreiben läßt.

Zusätzlich zu den Spurparametern α_i und dem Wert von Q_{min}^2 als Maß für die "Spurgüte" liefert der Spurfite die Kovarianzmatrix² der Spurparameter. Bild 5.5 stellt den wichtigsten Datenfluß graphisch dar. Um

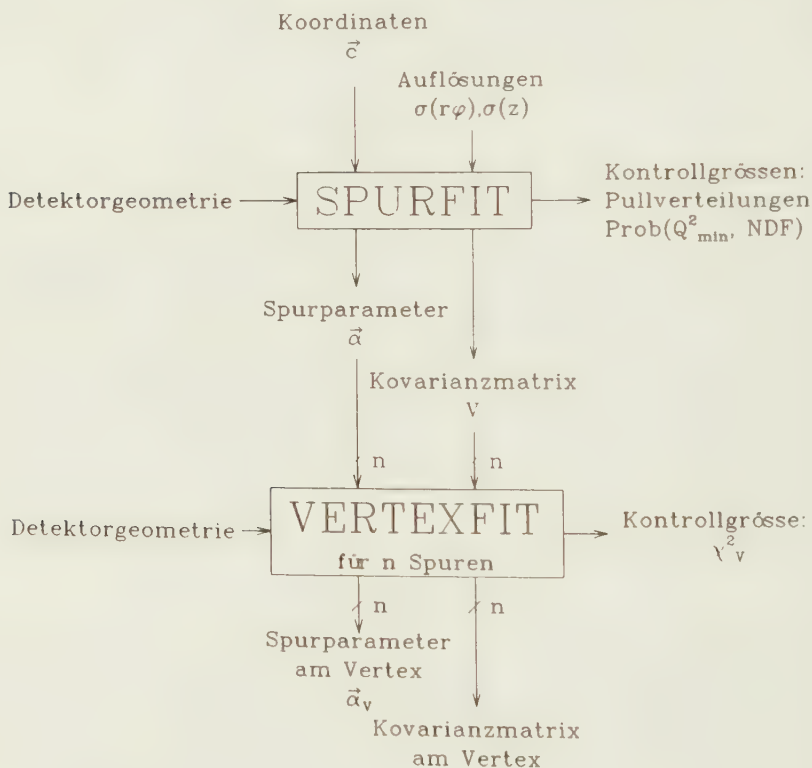


Abbildung 5.5: Datenfluß im Spur- und Vertexfit

die Richtigkeit der im Spurfite gemachten Annahmen zu überprüfen (insbesondere für die Werte der Ortsauflösungen der Kammern), werden sogenannte "reduzierte Pullverteilungen" (siehe Anhang A) berechnet.

²Die Kovarianzmatrix beschreibt die aus den Meßfehlern der Koordinaten abgeleiteten Fehler der Spurparameter einschließlich ihrer Abhängigkeiten.

Bei einem ordnungsgemäß durchgeführten Spurfit müssen diese Verteilungen Gaußverteilungen mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und einer Standardabweichung $\sigma = 1$ sein. Diese Verteilungen sind empfindliche Kontrollgrößen für die korrekte Arbeitsweise des Detektors. Etwaige Verschlechterungen in der Leistungsfähigkeit einzelner Detektorkomponenten äußern sich meist direkt in einer Verbreiterung oder Verschiebung der Gaußverteilungen.

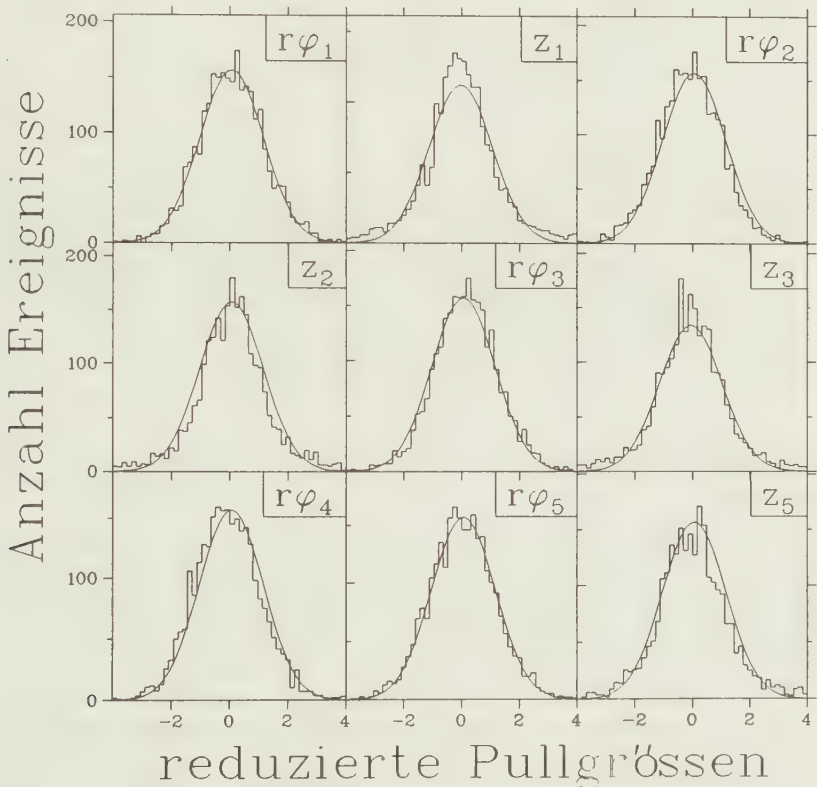


Abbildung 5.6: reduzierte Pullverteilungen aus Spurfit an gemessene Michelspuren

Eine weitere Kontrolle bietet die Verteilung der Q_{min}^2 -Größe. Diese muß eine χ^2 -Verteilung mit $N - 5$ Freiheitsgraden ("number of degrees of freedom"=NDF) sein [61]. Zur leichteren Überprüfung dieser Bedin-

gung wird statt $Q_{\min}^2$ die "Wahrscheinlichkeitsfunktion" von $Q_{\min}^2$ gebildet (Anhang A), die im Falle gaußverteilter Meßfehler eine flache Verteilung zwischen den Werten 0 und 1 liefern muß.

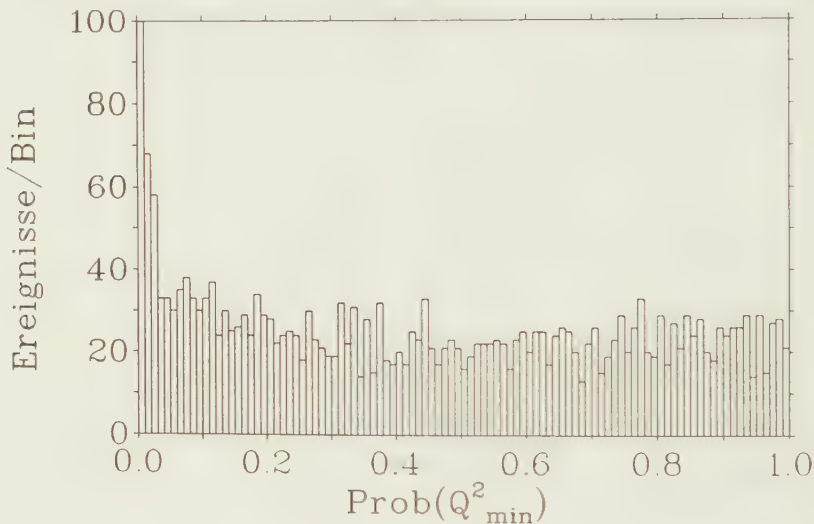


Abbildung 5.7: Wahrscheinlichkeitsverteilung von $Q_{\min}^2$ aus Spurfit an gemessene Michelsonspuren

Die Ortsauflösungen der Kammern wurden für die $r\phi$ -Projektion aus Monte Carlo Ereignissen bestimmt. Die z -Auflösung wurde aus den Daten für jede Kammer getrennt bestimmt, indem die Positionen der Anodendrähte aus den Kathodensignalen rekonstruiert wurden. Die $r\phi$ -Auflösung dieser Positionsmessung entspricht dabei der z -Auflösung, da sich die $r\phi$ -Koordinate aus der *Differenz* und die z -Koordinate aus der *Summe* der Kathodenkoordinaten von Innen- und Außenzylinder berechnet [57]. Die Abweichungen der Anodendrähte von ihren Sollpositionen wird dabei automatisch mitberücksichtigt. Tabelle 5.2 faßt die so gewonnenen Werte individueller Ortsauflösungen zusammen.

Setzt man diese Werte in den Spurfit ein, so zeigen die reduzierten Pullverteilungen, daß die "globalen" Ortsauflösungen deutlich schlechter sind. Dies liegt daran, daß einerseits die Kammern nicht ideal rund sind und andererseits nicht mit absoluter Genauigkeit relativ zueinander

Tabelle 5.2: Individuelle und globale Auflösungen der Kammern für die $r\phi$ - und z -Koordinaten.

Kammer	$\sigma_{r\phi}$ [mm]		σ_z [mm]	
	individuell	global	individuell	global
1	0.46	0.56	0.36	0.59
2	0.45	0.53	0.31	0.54
3	0.46	0.55	0.46	0.76
4	0.43	0.51	-	-
5	0.40	0.48	0.54	0.85

positioniert werden können. In der Spalte "global" sind daher die effektiven Auflösungen angegeben, bei denen die Pullverteilungen die geforderte Breite annehmen. Bild 5.6 zeigt die mit den globalen Auflösungen bestimmten reduzierten Pullverteilungen und Bild 5.7 die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Q_{min}^2 für die gemessene Michelspuren.

Bild 5.8 zeigt schließlich die erreichten Impuls- und Winkelauflösungen als Funktion des transversalen Impulses p_t und des Neigungswinkels λ (Definition von λ im Anhang A). Der relative Fehler des Transversalimpulses σ_{p_t}/p_t setzt sich aus zwei Anteilen zusammen [63,59]:

- der Fehler auf Grund der Meßfehler in den Kammerkoordinaten, der proportional zu p_t ist.
- der Fehler auf Grund der Vielfachstreuung in den Kammern, der umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit der Zerfallsteilchen ist. Da in diesem Experiment alle Zerfallsteilchen hochrelativistisch sind ($v = c$), liefert dieser Fehler einen konstanten Beitrag zum Gesamtfehler.

Die Auflösung für p_t läßt sich daher wie folgt parametrisieren:

$$\sigma_{p_t} = p_t \cdot \sqrt{(a \cdot p_t)^2 + b^2} \text{ mit } a = 6.0 \cdot 10^{-4} \text{ c/MeV und } b = 3\%$$

Die angegebenen Zahlenwerte ergeben sich aus einem Fit an die Daten. Für einen Transversalimpuls unterhalb von 50 MeV/c überwiegt also der Anteil der Vielfachstreuung am Gesamtfehler. Ein ähnlicher Ansatz läßt sich für die Winkelauflösung in der $r\phi$ -Projektion am DCA durchführen:

$$\sigma_\phi = \sqrt{(c/p_t)^2 + d^2} \text{ mit } c = 0.43 \text{ rad} \cdot \text{MeV/c und } d = 14 \text{ mrad}$$

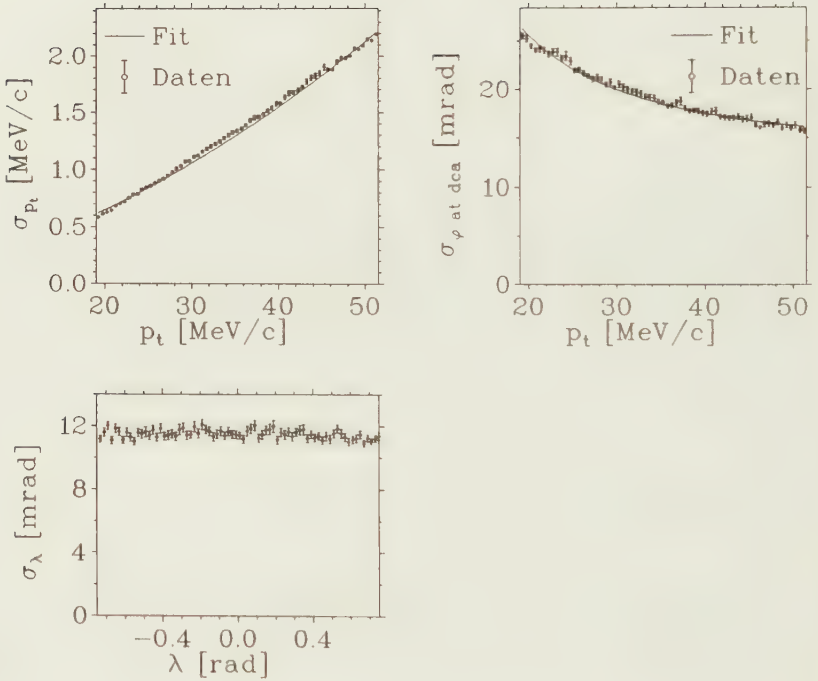


Abbildung 5.8: Impuls- und Winkelauflösung in der $r\phi$ - und rz Projektion als Funktion des transversalen Impulses p_t und des Neigungswinkels λ

Die Auflösung des Neigungswinkels λ ist von λ selber unabhängig und beträgt im Mittel 11 mrad.

5.3.2 Der Vertexfit

Der Vertexfit nimmt die Ergebnisse des Spurfits für mehrere Spuren (zwei oder drei) und berechnet daraus ein Maß für die Vertexgüte dieser Spuren (χ_V^2), die Lage des Vertex im Raum und die Spurparameter am Vertex (siehe Bild 5.5). Dazu werden die für jede Spur getrennt bestimmten Spurparameter im Rahmen ihrer Fehler (gegeben durch die Kovarianzmatrizen) solange verändert, bis die zugehörigen Spuren einen gemeinsamen Kreuzungspunkt im Raum besitzen. Die Vielfachstreuung im Target wird durch eine entsprechende Anpassung der Kovarianzmatrizen berücksichtigt. Die χ_V^2 -Größe ist dabei ein Maß für die benötigte Änderung der Spurparameter und kann deshalb als Vertexgüte aufgefaßt werden. Der Vertexfit kann unter einer Reihe von Nebenbedingungen durchgeführt werden:

- Der Vertex soll auf dem aktiven Teil des Targets liegen.
- Der Vertex soll auf dem aktiven Teil von Targetzähler i liegen.
- Der Vertex soll auf dem aktiven Teil von Targetzähler i liegen und die Impulsvektoren der Zerfallsteilchen sollen eine kinematische Bedingung erfüllen ("kinematischer" Vertexfit, siehe [62]). Zum Beispiel müssen beim $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall die Impulsvektoren der geladenen Teilchen die Bedingung

$$\sum_{i=1}^3 E_i + \left| \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c \right| \stackrel{!}{=} m_\pi c^2$$

erfüllen, falls das π^+ in Ruhe zerfällt.

Die ersten beiden Nebenbedingungen sind für die Unterdrückung des zufälligen Untergrunds entscheidend. Der kinematische Vertexfit schafft dagegen die Voraussetzung für die Likelihood-Analyse der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse (Kapitel 7.3), da dort die Impulsvektoren der Zerfallsteilchen in das Matricelement für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall eingesetzt werden müssen, was die Erfüllung der kinematischen Randbedingungen voraussetzt.

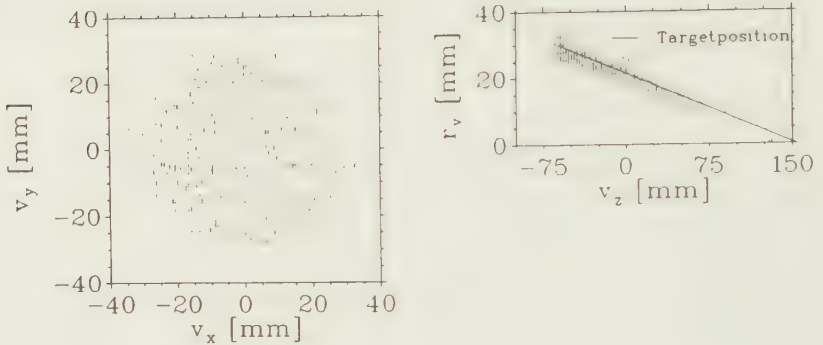


Abbildung 5.9: Verteilung der Vertices für $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse in der $r\phi$ - und rz -Projektion

Die Position des Targets entlang der z -Achse konnte mit der Vertexverteilung der gemessenen $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse, wie sie sich aus dem Vertexfit *ohne* Nebenbedingungen ergab, bestimmt werden (Bild 5.9).

Genau wie im Spurfit dient auch hier die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen χ^2_V als Kontrollgröße für die Richtigkeit der im Vertexfit gemachten Annahmen. Die Anzahl der Freiheitsgrade hängt von den verlangten Nebenbedingungen ab. Bild 5.10 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die gemessenen $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse, wobei keine Nebenbedingungen für den Vertex verlangt wurden. Nur Ereignisse mit einem Wahrscheinlichkeitswert überhalb 0.02 wurden als $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse akzeptiert. Da die Streuung im Target nicht berücksichtigt wurde, zeigt die Verteilung noch eine leichte Neigung.

Tabelle 5.3 zeigt die erreichten Vertexauflösungen bei verschiedenen Nebenbedingungen, berechnet aus simulierten $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Ereignissen.

5.4 Bestimmung der Zahl gestoppter π^+

Für die Messung des Verzweigungsverhältnisses im $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall muß die Gesamtzahl der im aktiven Teil des Targets gestoppten π^+ bestimmt werden. Diese Zahl wurde auf zwei verschiedene Arten bestimmt:

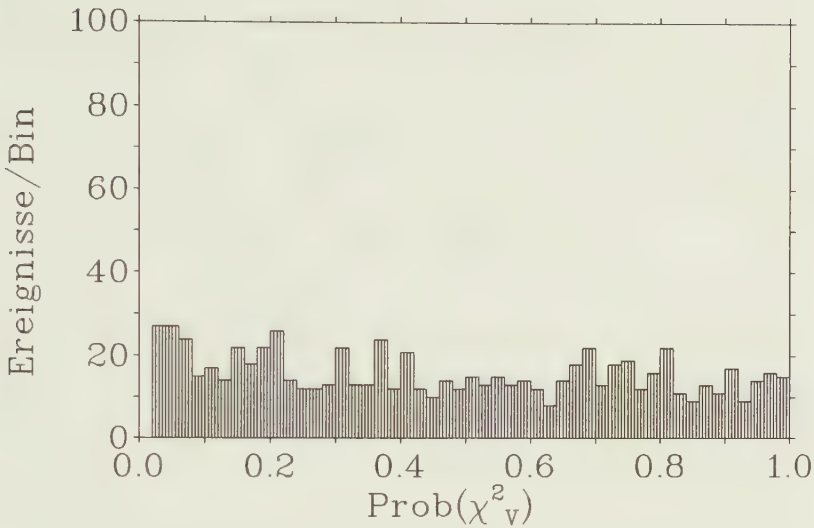


Abbildung 5.10: Wahrscheinlichkeitsverteilung von χ^2_v für die gemessenen $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse

Tabelle 5.3: Auflösung der Vertexkoordinaten bei verschiedenen Nebenbedingungen für simulierte $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Ereignisse.

Nebenbedingung	$\sigma_x = \sigma_y$ [mm]	σ_z [mm]
-	1.23	0.98
Vertex auf Target	0.75	0.87
kinematischer Fit	0.73	0.86

5.4.1 Die "Michel" Methode

Da fast jedes π^+ über ein μ^+ in ein "Michel"- e^+ zerfällt, kann man die Anzahl der gefundenen Positronspuren $N_{e^+}{}^3$ zur Bestimmung der Anzahl gestoppter Pionen $N_{\pi \text{ Stopp}}$ heranziehen, wenn man die Nachweiswahrscheinlichkeit ε_{e^+} für solche Positronspuren kennt: $N_{\pi \text{ Stopp}} = N_{e^+} / \varepsilon_{e^+}$. Dazu wurde in Monte Carlo Ereignissen die gesamte $\pi - \mu - e$ Zerfallskette simuliert und daraus die Anzahl nachgewiesener e^+ Spuren pro gestopptes π^+ bestimmt, die auf den aktiven Teil des Targets zeigten ("Typ A" Spuren):

$$\varepsilon_{e^+} = \left[\frac{N_{\pi \text{ Stopp}}}{N_{e^+}} \right]_{MC} = 0.52 \pm 0.04$$

Die totale Anzahl nachgewiesener Positronspuren ließ sich aus den Hodoskopraten (Summe über vier Szintillatoren, siehe Abschnitt 4.2) bestimmen, die während der gesamten Datennahme summiert wurden: $N_{Hodo} = 9.75 \cdot 10^{11}$. Der Umrechnungsfaktor kann aus "Michel-Runs" abgeleitet werden, in denen als einzige Triggerbedingung ein Cluster im Hodoskop verlangt wurde:

$$N_{e^+} = N_{Hodo} \cdot \left[\frac{\text{Anzahl Spuren vom Typ A}}{\text{Anzahl Hodo-Hits}} \right]_{\text{Michel}} = (2.11 \pm 0.06) \cdot 10^{12}$$

$$\Rightarrow N_{\pi \text{ Stopp}} = (3.98 \pm 0.32) \cdot 10^{12}$$

Der Fehler für N_{e^+} ist ein rein statistischer Fehler: insgesamt wurden in vier Szintillatoren während der Michel-Runs lediglich 1729 Hits aufintegriert. Der Hauptbeitrag zum Fehler von ε_{e^+} resultiert aus der nicht genau bekannten Stoppverteilung der Myonen. Diese hängt einerseits von der Stoppverteilung der Pionen und andererseits von der Dicke der Targetzähler ab, da hauptsächlich μ^+ , die im Target stoppen (70% der Myonen aus dem $\pi^+ \rightarrow \mu \nu_\mu$ Zerfall), zu "Typ A" Spuren führen. Bei einer Ungenauigkeit der Targetdicke von 10% (FWHM) und einer Genauigkeit der Monte Carlo Stoppsimulation von 5% (FWHM) [64] ergibt sich ein Fehler von 5% (σ). Dazu kommt die Ungenauigkeit, mit der aus der gemessenen und an die Monte Carlo Ereignisse angepaßten Stoppverteilung auf die π Stoppverteilung geschlossen werden kann, die einen weiteren Beitrag von 5% (σ) zum Gesamtfehler liefert. Weitere Fehlerquellen sind: Ungenauigkeit des Magnetfelds ($< 1\%$), der Nachweiswahrscheinlichkeit

³Alle im folgenden gemachten Angaben über Zählraten oder Anzahl Hits enthalten die Totzeitkorrektur

für Einzelspuren (1.5%) und der statischer Fehler der Monte Carlo Simulation (1%), total also ein Fehler von 7.5% (σ). Die Positions-Stabilität des Strahls ließ sich durch das Verhältnis R der totalen Hodoskoprate zur totalen π -Stopprate überwachen. Die Schwankungen von R blieben während der gesamten Dauer des Versuchs unter einem Wert von 4%.

5.4.2 Die "Pulsshape" Methode

Hierbei benützt man die $\pi\bar{\mu}$ -Rate zusammen mit der Information aus der "Pulsshape-Analyse", um die totale Anzahl gestoppter Pionen zu bestimmen. Zur $\pi\bar{\mu}$ -Rate tragen Ereignisse bei, bei denen

1. ein π^+ im aktiven Teil des Targets gestoppt wurde und innerhalb der Doppelpulsauflösung τ_D der Elektronik in ein μ^+ zerfiel.
2. ein π^+ im aktiven Teil des Targets gestoppt wurde, aber das μ^+ beim Zerfall zu wenig Energie im selben Targetzähler deponiert.
3. ein π^+ im aktiven Teil des Targets gestoppt wurde und der Zerfall außerhalb des selektierten Zeitbereichs von 78 ns stattfindet.
4. ein π^+ das Target durchdringt und am Antizähler Z_2 vorbeigestreut wird.
5. ein Zerfallsteilchen genug Energie im Target deponiert, um die Schwelle der Targetzähler zu überschreiten.

Die im Abschnitt 5.2.3 eingeführte Größe "V" als Maß für die Verzerrung der Signalform erlaubt nun, die unter Punkt 1 genannten Ereignisse vom Rest zu separieren. Diese Ereignisse sind nämlich im "Schwanz" der V-Verteilung lokalisiert, da nur bei ihnen eine Veränderung der Signalform vorliegt.

Allerdings werden nicht alle unter Punkt 1 genannten Ereignisse die Signalform stark verändern (wenn zum Beispiel das μ^+ nur wenig Energie deponiert), so daß sich diese Ereignisse unter dem "Hauptpeak" fortsetzen. Die Form dieser Fortsetzung kann aus einer Monte Carlo Simulation bestimmt werden, indem die Verteilung der Größen A_{fast} und A_{slow} für simulierte und echte Ereignisse oberhalb der Geraden g (siehe Bild 5.11) aneinander angepaßt werden. Die gemessenen Amplitudenverteilungen wurden aus den $\pi^+ \rightarrow e^+e^-\nu_e$ Datenbändern gewonnen, wobei nur solche Ereignisse berücksichtigt wurden, bei denen keine der gefundenen

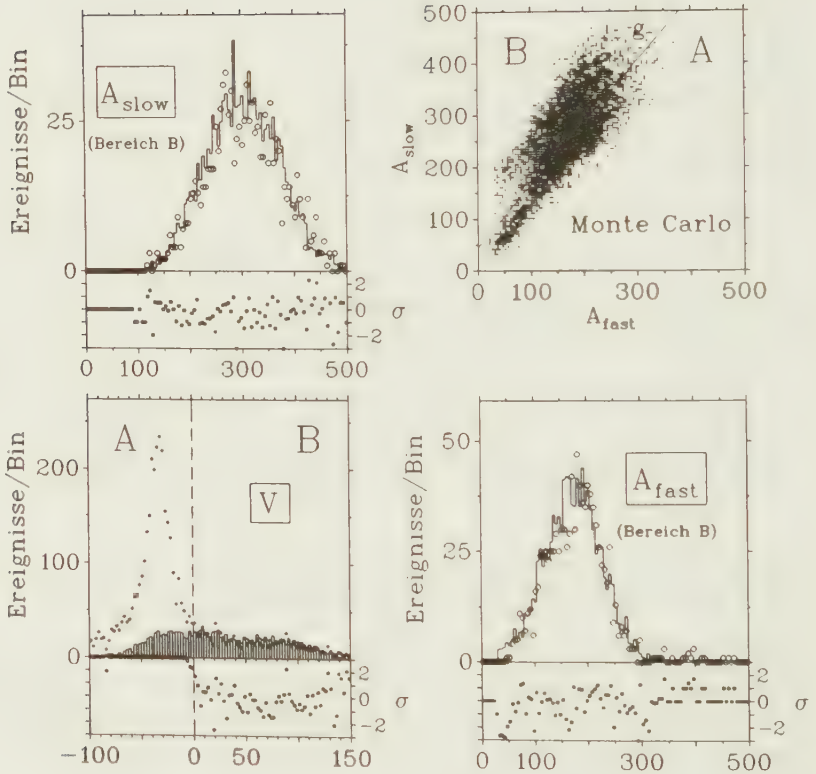


Abbildung 5.11: Amplitudenspektren von Targetzähler 1 für nicht spurkorrelierte Ereignisse (Kreise) und entsprechende Monte Carlo Spektren (durchgezogene Linien) für echte π -Stop Signale. Die Größe σ ist die Differenz der Spektren in Einheiten des erwarteten Fehlers.

Spuren aus dem angesprochenen Targetzähler stammen konnte. Damit wurde eine Verzerrung der Target-Amplitudenspektren auf Grund der Triggerbedingungen im CPS und TPS ausgeschlossen. Bild 5.12 zeigt den Einfluß dieser Bedingung auf die Form der Spektren.

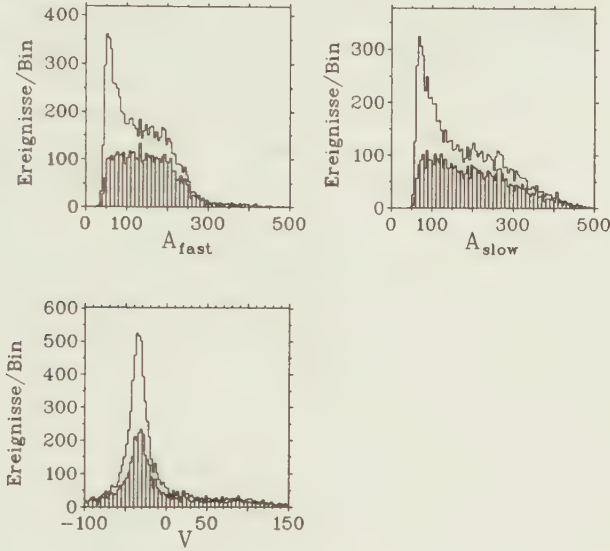


Abbildung 5.12: Amplitudenspektren von Targetzähler 1 für die Ereignisse der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Datenbänder. Schraffiert gekennzeichnet sind die Spektren für nicht spurkorrelierte Ereignisse

Dieses Verfahren wurde für jeden Targetzähler getrennt durchgeführt und daraus der Prozentsatz p_i der unter Punkt 1 genannten Ereignisse in der $\pi\bar{\mu}$ -Rate berechnet. Die Anzahl gestoppter Pionen ergibt sich dann aus:

$$N_{\pi-Stop} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(\pi\bar{\mu})_i \cdot p_i}{t_i \cdot \varepsilon_i} \quad \text{mit } t_i = 1 - e^{-\tau_D^i/\tau_\pi} \quad (5.1)$$

$$= (4.12 \pm 0.53) \cdot 10^{12} \quad (5.2)$$

Die Faktoren ε_i sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein gestopptes Pion auch ein "π-Stop" Signal erzeugt, und hängen von den eingestellten Schwellen ab. Die Lage der Schwellen ließ sich aus den gemessenen Amplitudenspektren ablesen. Zusammen mit den angepassten Monte Carlo

Daten ließ sich daraus der Verlustfaktor abschätzen. Die Werte der τ_D^i sind am Ende des Experiments mit einer Genauigkeit von $\pm 1 ns$ (7%) bestimmt worden. Aus der Stabilität der gemessenen Targetraten gegenüber den Hodoskopraten ließ sich ableiten, daß die Schwankungen der τ_D^i während des Experiments unterhalb dieser Meßgenauigkeit lagen. Die Fehler der Größen ε_i und p_i können nur geschätzt werden, da man sich ganz auf die Extrapolation der Spektren mit Monte Carlo Ereignissen verlassen muß. Er wurde daher mit einem Wert von zusammen 10% eher hoch angesetzt. Dies ergibt den angegebenen Gesamtfehler von 13%.

Schließlich erhält man als gewichteten Mittelwert der beiden Methoden (die Fehler sind statistisch unabhängig) die totale Anzahl gestoppter Pionen von

$$N_{\pi-Stop} = (4.02 \pm 0.27) \cdot 10^{12}.$$

Kapitel 6

Die Monte Carlo Simulationen

6.1 Motivation

Bei der Analyse eines Experiments stellt sich die Aufgabe, aus einem gemessenen Satz ("sample") von Ereignissen (jedes Ereignis wird durch Variablen $\vec{x}$, zum Beispiel kinematische Variablen, charakterisiert) auf die zugrunde liegende Häufigkeitsverteilung $f(\vec{x})$ zu schließen. Diese Verteilung kann dann mit theoretischen Vorhersagen $f_{th}(\vec{x})$ verglichen werden. Falls die Theorie von Parametern $\vec{a}$ abhängt, können die Werte dieser Parameter aus einem Fit von $f_{th}(\vec{x}, \vec{a})$ an die gemessene Verteilung $f(\vec{x})$ abgeleitet werden. In Hochenergie-Experimenten stellt sich dabei das Problem, daß weder die Größen $\vec{x}$ noch ihre Verteilungen direkt gemessen werden können. So werden im allgemeinen Ortskoordinaten $\vec{y}$ gemessen und daraus die kinematischen Variablen $\vec{x}$ (=Spurparameter, siehe Anhang A) abgeleitet. Die Verteilungen sind durch die begrenzte Akzeptanz und das endliche Auflösungsvermögen des Detektors verfälscht. Statt der physikalisch relevanten Größen $\vec{x}$ werden also Größen $\vec{y}$ und deren Verteilungen $g(\vec{y})$ gemessen. Um nun trotzdem das Experiment mit einer Theorie vergleichen zu können, gibt es zwei Lösungsansätze:

- Man versucht, aus der gemessenen Verteilung $g(\vec{y})$ auf die "unverfälschte" Verteilung $f(\vec{x})$ zurückzuschließen ("Entfalten"). Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß die so erhaltenen Spektren direkt mit der Theorie oder auch mit Spektren aus anderen Experimenten verglichen werden können. Leider existieren für diese Methode brauchbare Algorithmen nur für eindimensionale Verteilungen. Zuverlässige Resultate erhält man außerdem nur bei sehr guter Statistik mit typisch mehr als 10000 Ereignissen [65].

- Die zweite Methode besteht darin, die von einer Theorie vorhergesagte Verteilung genau der gleichen "Verformung" zu unterwerfen wie die gemessenen Daten, und dann diese "verformten" Verteilungen miteinander zu vergleichen. Dazu muß die genaue Art der Verformung ("detector response function") bekannt sein. Die "detector response function" kann bei komplexen Detektoren nur noch mit der "Monte Carlo Methode" bestimmt werden. Hierbei wird das Experiment im Computer nachgebildet, indem für alle entstehenden Teilchen die Reaktionen mit den Detektorkomponenten möglichst naturgetreu simuliert werden. Dieses Verfahren vermeidet die oben genannten Nachteile, allerdings auf Kosten eines hohen Rechenaufwands.

Da für dieses Experiment mehrdimensionale Verteilungen mit geringer Statistik (~ 100 Ereignisse) untersucht werden müssen, kommt nur die Monte Carlo Methode in Betracht. Um den Rechenaufwand nicht zu stark anwachsen zu lassen, werden gewisse Vereinfachungen zugelassen, die aber eine spätere Anpassung der Monte Carlo Daten an die gemessenen Daten erforderlich machen. Die gesamte Simulation wird in drei Schritte aufgeteilt. Im ersten Schritt werden die theoretisch erwarteten Verteilungen der kinematischen Observablen berechnet und Ereignisse entsprechend dieser Häufigkeitsverteilungen erzeugt. Im zweiten Schritt werden die Reaktionen der Teilchen mit dem Detektor simuliert, und im dritten Schritt schließlich werden die simulierten Daten an die gemessenen Daten angepaßt. Diese drei Schritte werden in den folgenden Abschnitten am Beispiel des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfalls eingehender beschrieben.

Insgesamt wurden folgende Zerfälle und Reaktionen simuliert:

1. $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$
2. $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e \gamma$ mit externer Konversion des Photons: $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
3. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$
4. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e \gamma$ mit externer Konversion des Photons: $\gamma \rightarrow e^+ e^-$
5. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$
6. $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$ mit anschließender Bhabhastreuung des Positrons:
 $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$
7. $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ mit anschließendem Zerfall des Axions: $a \rightarrow e^+ e^-$

6.2 Die Integration des Phasenraums

Die Häufigkeitsverteilung der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse im Phasenraum wird durch das Matricelement bestimmt (Abschnitt 2.2.3 und Anhang C). Sie hängt beim $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall von drei Parametern (Formfaktoren) ab. Der Phasenraum hat in diesem Fall fünf Dimensionen, wobei zum Beispiel die Energien der drei geladenen Teilchen und die Winkel der auslaufenden Positronen relativ zur Richtung des Elektrons als unabhängige Variable gewählt werden können. Aus dem Energie- und Impulserhaltungssatz ergeben sich dann bis auf eine physikalisch irrelevante Orientierung im Raum (drei Freiheitsgrade) die Werte für alle Impulskomponenten der vier Zerfallsprodukte. Um nun Ereignisse mit der vorbestimmten Häufigkeitsverteilung im Phasenraum zu erzeugen, muß das Matricelement über diesen Phasenraum integriert werden¹. Die dazu benötigten Verfahren sind in der Literatur ausführlich diskutiert worden [66,67,68,69,70]. Für das $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Matricelement wurde die Methode aus [66] verwendet. Dabei werden Zufallszahlen erzeugt, die als invariante Massen und Winkel interpretiert werden, und aus ihnen ein Punkt im Phasenraum (= ein Ereignis) berechnet. Jedem Ereignis wird dann ein Gewicht W zugeordnet, das sich als Produkt eines "Phasenraumgewichts" und eines aus dem Matricelement abgeleiteten "dynamischen Gewichts" berechnet. Das totale Integral ergibt sich dann aus der Summe dieser Gewichte W , geteilt durch die Anzahl "gewürfelter" Ereignisse. Die Genauigkeit, mit der sich das Integral bestimmen läßt, hängt einerseits von der Anzahl N gewürfelter Ereignisse ab (der Fehler ist proportional zu $1/\sqrt{N}$), und andererseits von der Streuung (Varianz) der Gewichte. Bei einem Matricelement wie für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ oder $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ Zerfall ist diese Varianz sehr groß; die Gewichte für verschiedene Ereignisse unterscheiden sich um bis zu sechs Zehnerpotenzen. Bei einer direkten Anwendung der Methode würde man also einen Großteil der Rechenzeit für Ereignisse aufwenden, die einen verschwindend geringen Beitrag zum Gesamtintegral liefern. Um diesen Effekt zu vermeiden, wurden Varianz reduzierende Techniken angewendet. Ziel dieser Techniken ist es, im Idealfall alle Ereignisse mit dem gleichen Gewicht zu erzeugen. Von den in der Literatur beschriebenen Methoden (Hit-or-

¹Das Problem der Erzeugung von Ereignissen nach vorgegebenen Häufigkeitsverteilungen ist mathematisch äquivalent zur Integration des Phasenraums mit Monte Carlo Methoden [66]

miss Monte Carlo, crude Monte Carlo, stratified sampling, importance sampling, [66]) wurde die Methode des "stratified sampling" gewählt. Hierbei werden Ereignisse hauptsächlich in den Gebieten des Phasenraums erzeugt, in denen die Gewichtsfunktion die größten Schwankungen aufweist. Das dazu benötigte Wissen über den Verlauf der Gewichtsfunktion G im Phasenraum wird durch eine schrittweise Anpassung des Integrationsverfahrens an diese Gewichtsfunktion gewonnen. Dazu wird das Integrationsgebiet zunächst in n Regionen unterteilt und in jeder dieser Regionen getrennt eine grobe Integration durchgeführt. Diese Integration liefert das Entscheidungskriterium für die weitere Aufteilung des Integrationsgebietes, wobei immer jeweils das Teilgebiet mit der momentan größten Varianz als nächstes weiter unterteilt wird. Dieses Aufteilungsverfahren wird solange fortgesetzt, bis die Varianz einen verlangten Schwellenwert unterschreitet. Nach Abschluß dieser "Trainingsphase" ist man in der Lage, Ereignisse mit annähernd gleichen Gewichten (das kleinste und das größte Gewicht unterscheiden sich nur noch um einen Faktor 10 bis 100) zu erzeugen. In der "Produktionsphase" werden diese Ereignisse noch mit der "Hit-or-miss"-Methode [66] weiterverarbeitet, so daß man schließlich ungewichtete Ereignisse (alle Ereignisse haben das Gewicht 1) erhält.

Es existieren verschiedene Programme, die diese adaptiven Integrationsverfahren durchführen [71,72,75,76]. Sie unterscheiden sich in der Art der Gebietsaufteilung und in der Berechnung der Varianz als Kriterium für die weitere Verfeinerung des Integrationsgebietes. Am wirkungsvollsten erwies sich das in [72] beschriebene Verfahren. Die benötigte Rechenzeit konnte je nach der Verteilung der Gewichtsfunktion gegenüber der direkten Integrationsmethode um einen Faktor 30 bis 200 reduziert werden.

Hängt die theoretisch erwartete Gewichtsverteilung noch von Parametern $\vec{a}$ ab, wie das im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Matricelement der Fall ist, so müßte man im Prinzip das oben beschriebene Integrationsverfahren für jede in Betracht kommende Kombination von Parameterwerten wiederholen. Dies würde jedoch wieder zu einem unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand führen. Statt dessen kann man die Abhängigkeit von den Parametern aber auch für jedes Ereignis getrennt in den Gewichtungsfaktor W_i mitaufnehmen: $W_i = W_i(\vec{a})$. Dadurch erhält man zwar wieder gewichtete Ereignisse, doch sind die Schwankungen der Gewichte als Funktion der Parameter in den physikalisch interessanten Bereichen relativ klein

($W_{\max}/W_{\min} \approx 3$) und führen bei ausreichender Anzahl von simulierten Ereignissen zu einer vernachlässigbaren Vergrößerung des statistischen Fehlers.

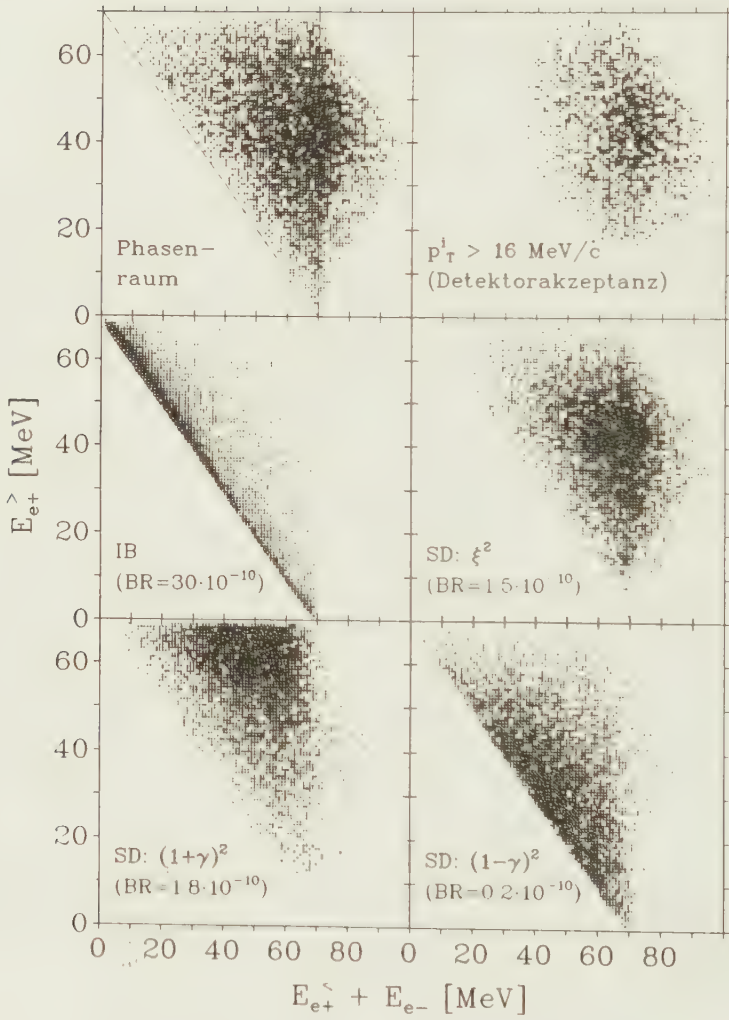
Für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall ergab sich aus der Integration des gesamten Phasenraums ein theoretisch erwartetes Verzweigungsverhältnis ("branching ratio = BR") von

$$BR_{th}^{tot} = (3.36 \pm 0.08) \cdot 10^{-9}$$

Der angegebene Fehler ist rein statistischer Natur und ist vergleichbar mit dem Fehler, der auf Grund der vernachlässigten Strahlungskorrekturen für das Matrixelement erwartet wird. Dieser Wert gilt streng genommen nur für die Standardwerte der Formfaktoren (siehe Abschnitt 2.2.3). Das totale Verzweigungsverhältnis ist aber durch den inneren Bremsstrahlungsanteil dominiert, der nicht von den Werten der Formfaktoren abhängt. Bild 6.1 zeigt eine zweidimensionale Projektion des fünfdimensionalen Phasenraums auf die kinematischen Größen $E_{e^+}^< + E_{e^-}$ und $E_{e^+}^>$, aufgeteilt nach inneren Bremsstrahlungsanteilen (IB) und strukturbhängigen Anteilen (SD). Dabei ist E_{e^-} die Energie des Elektrons, $E_{e^+}^<$ die Energie des Positrons, das mit dem Elektron zusammen die kleinere invariante Masse bildet und $E_{e^+}^>$ die Energie des anderen Positrons. Diese Projektion kann als Analogon zum Dalitzplot im Dreikörperzerfall $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ betrachtet werden, wobei die Energie des Photons durch die totale Energie des e^+e^- -Paares mit der kleineren invarianten Masse ersetzt ist. Die beiden oberen Verteilungen zeigen die "Phasenraumverteilung" der Ereignisse für die $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Kinematik, das heißt, die Verteilung der Ereignisse bei *konstantem* Matrixelement. Die gestrichelten Linien im linken Bild umranden den Bereich des "konventionellen" Dalitzplots (siehe Abschnitt 2.2.2). Im rechten Bild wurde verlangt, daß alle geladenen Teilchen einen Transversalimpuls über 16 MeV/c besitzen. Diese Bedingung zeigt, welcher Teil des Phasenraums vom SINDRUM Detektor erfaßt werden kann. Der Anteil der inneren Bremsstrahlung am Matrixelement ist fast ausschließlich auf ein Gebiet entlang der Diagonalen

$$E_{e^-} + E_{e^+} + E_{e^+} = m_\pi - E_\nu = \frac{m_\pi}{2}$$

beschränkt, in dem das Neutrino seine maximal mögliche Energie annimmt. Man erkennt, daß der Detektor nur den Teil des Phasenraums überdeckt, in dem der physikalisch uninteressante IB-Anteil stark unterdrückt ist. Die SD-Anteile sind nach Termen proportional zu ξ^2 , $(1+\gamma)^2$

Abbildung 6.1: "Dalitzplot" im $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall

und $(1 - \gamma)^2$ aufgefächert. Diese drei Beiträge zusammen machen rund 95% der strukturabhängigen Anteile aus, die restlichen 5% verteilen sich auf Interferenzterme proportional zu ξ und $\gamma \cdot \xi$. Die Beiträge proportional zu $(1 + \gamma)^2$ und $(1 - \gamma)^2$ entsprechen den Verteilungen im Dalitzplot für den $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall (siehe Abschnitt 2.2.2). Der Beitrag proportional zu ξ^2 hat dagegen keine Entsprechung im $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfall. Die Ereignisse sind für diesen Term annähernd phasenraumverteilt. Man erkennt, daß der SINDRUM Detektor einen Großteil dieser Ereignisse erfassen kann. Der Beitrag der IB- und SD-Anteile zum Verzweigungsverhältnis ist in Klammern angegeben, wobei für die SD Anteile die oben genannten Werte der Formfaktoren F_V , F_A und R angenommen wurden.

Bild 6.2 zeigt die Verteilung der Neutrinoenergie E_ν und der invarianten Masse des e^+e^- Paares mit der kleineren invarianten Masse $m_{e^+e^-}^<$ im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall. Der Beitrag der SD-Anteile am totalen Verzweigungsverhältnis BR ist entsprechend der obigen Auffächerung für die drei Hauptbeiträge schraffiert gekennzeichnet. Der abgeschnittene Teil (hauptsächlich IB-Anteile) macht rund 75% der totalen Rate aus. Die

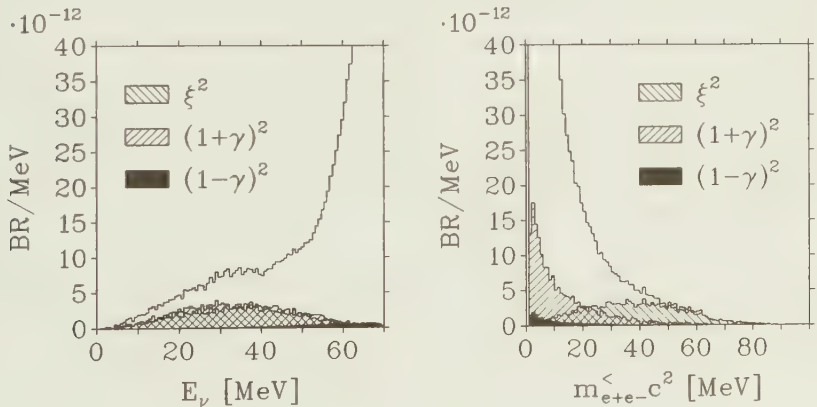


Abbildung 6.2: Verteilung der Neutrinoenergie und der invarianten Masse des e^+e^- Paares mit der kleineren invarianten Masse im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall

entsprechenden Verteilungen mit der Bedingung, daß alle geladenen Teilchen mindestens einen Transversalimpuls von 16 MeV/c aufweisen, ist in Bild 6.3 gezeigt. Hier tragen die IB Anteile nur noch mit 47% zur totalen

Rate bei.

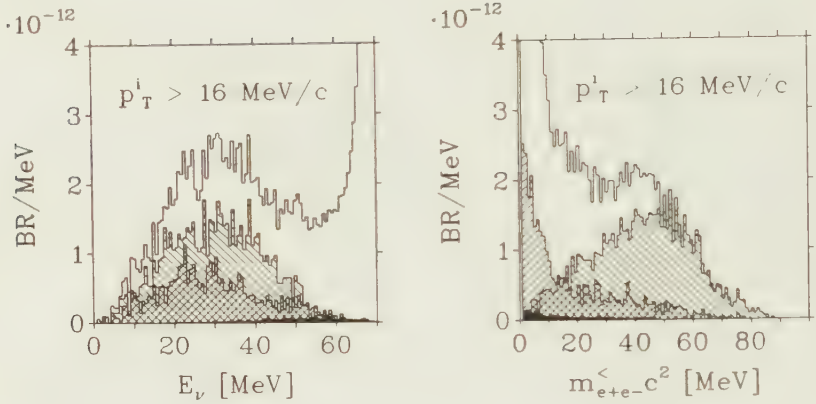


Abbildung 6.3: Verteilung der Neutrinoenergie und der invarianten Masse des e^+e^- Paares mit der kleineren invarianten Masse im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall für Ereignisse, bei denen alle geladenen Teilchen einen Transversalimpuls über $16 \text{ MeV}/c$ besitzen.

Die hier zugrunde gelegten Berechnungen zum $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Matrixelement stehen im Widerspruch zu den Resultaten zweier Publikationen [77,79]. Die Berechnungen in [79] sind jedoch fehlerhaft [78]. Die Resultate in [77] liefern für den IB-Anteil alleine einen Wert für das Verzweigungsverhältnis von $8.6 \cdot 10^{-9}$, also einen um den Faktor 2.5 größeren Wert als das hier angenommene totale Verzweigungsverhältnis. Um sicher zu sein, daß die für die vorliegende Arbeit zugrunde gelegten Berechnungen richtig sind, wurde das Matrixelement auf insgesamt drei verschiedene Arten von Alfred Kersch berechnet (siehe auch Anhang C), die alle zum gleichen Resultat führten.

6.3 Die Simulation des Detektors

Die Wechselwirkung der Strahlteilchen und der Zerfallsprodukte mit dem Detektor wurde mit Hilfe des Programms "GEANT3" [64] simuliert. In diesem Programm kann der Detektor bausteinartig aus einfachen, vordefinierten Volumina zusammengesetzt werden. Jedem Volumen wird ein "Medium" zugeordnet, das einerseits das Material im Innern des Volumens beschreibt, und andererseits die Genauigkeit festlegt, mit der

man in dem betreffenden Volumen die Spur der Teilchen verfolgen will. Außerdem kann jedem Volumen ein Magnetfeld überlagert werden. Die Volumina können ineinander geschachtelt werden, wobei das Medium des jeweils zuletzt eingesetzten Volumens ("daughter volume") das Medium des übergeordneten Volumelements ("mother volume") verdrängt.

Die eigentliche Simulation beginnt mit der Festlegung der Impulskomponenten aller "primären" Teilchen. Dies können zum Beispiel die Pionen im Strahl sein, wenn man an der Stoppverteilung im Target interessiert ist, oder Elektronen und Positronen, wenn man die Reaktion des Detektors auf die Zerfallsprodukte untersuchen möchte. Die Impulskomponenten erhält man bei der Integration des Phasenraums für die entsprechende Reaktion, wie im Abschnitt 6.2 beschrieben wurde. Das GEANT3 Programm verfolgt nun die Bahn jedes Teilchens unter Berücksichtigung des Magnetfeldes und der Reaktionen der Teilchen mit dem Detektormaterial. Dabei können sowohl elektromagnetische als auch hadronische Wechselwirkungen simuliert werden. Allerdings sind im vorliegenden Fall alle Zerfallsprodukte Leptonen und unterliegen daher nur der elektromagnetischen Wechselwirkung. Effekte auf Grund der schwachen und gravitativen Wechselwirkung können vernachlässigt werden. Im einzelnen werden die folgenden Prozesse nachgebildet:

- **Vielfachstreuung:**

Man hat die Wahl zwischen einer gaußförmigen Verteilung der Streuwinkel oder einer Verteilung gemäß der Molière Theorie [80]. Es wurde die Molière-Verteilung gewählt, die vor allem Großwinkelstreuungen genauer beschreibt.

- **"stetige" elektromagnetische Prozesse:**

Hierzu zählen die Energieverluste auf Grund der Ionisation und der Bremsstrahlung (Abstrahlung "weicher" Photonen).

- **"diskrete" elektromagnetische Prozesse:**

Diese sind für geladene Teilchen: Bremsstrahlung (Abstrahlung "harter" Photonen), Möllerstreuung, Bhabhastreuung und Annihilation

und für Photonen: Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarproduktion.

Dabei läßt sich bestimmen, ab welcher Energie der "Sekundärteilchen" (z.B. der Photonen bei der Bremsstrahlung) der Prozeß als "diskret" betrachtet wird und damit zur Produktion eines neuen Teilchens führt, oder

als "stetiger" Prozess aufgefaßt wird und dann nur als Energieverlust des primären Teilchens in Erscheinung tritt. Aus der Zusammensetzung der Materialien werden die Wirkungsquerschnitte für jeden dieser Prozesse in dem betreffenden Detektorteil berechnet. Bei der Verfolgung der Teilchenbahn wird nach Maßgabe der Wirkungsquerschnitte die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Prozesse schrittweise neu berechnet und gegebenenfalls eine entsprechende Reaktion des Teilchens durchgeführt. Dabei können Sekundärteilchen entstehen, die ebenfalls weiter verfolgt werden. Alle Teilchen werden solange verfolgt, bis sie entweder eine vorbestimmte Energieschwelle unterschreiten oder das Detektorvolumen verlassen. Während der Spurverfolgung ("tracking") werden die deponierten Energien in allen "sensitiven" Teilen des Detektors addiert. Mit dieser Information kann dann festgelegt werden, welcher Anodendraht anspricht, auf welchem Kathodenstreifen wieviel Ladung induziert wird, welcher Szintillator wieviel Szintillationslicht produziert usw. Diese Daten werden dann in genau dem gleichen Datenformat wie im tatsächlichen Experiment auf Magnetband geschrieben. Damit hat man die Möglichkeit, die simulierten Ereignisse durch die gleichen Analyseprogramme verarbeiten zu lassen wie die gemessenen Daten. Die Wirkungsweise des Triggers wurde ebenfalls durch ein Programm von Willy Bertl simuliert, das auf Grund der angesprochenen Anodendrähte und Hodoskop Szintillatoren entscheidet, ob alle vier Triggerstufen (Majority Logik, CPS, TPS und TCR) das Ereignis akzeptieren. In diesem Schritt wird auch die "Trigger-Bank" an die Daten angehängt (siehe Abschnitt 4.2).

Um auch Reaktionen mit genügender Statistik erzeugen zu können, in denen eine Bhabhastreueung oder eine Paarkonversion im Target vorliegt (Reaktionen 2, 4 und 6 im Abschnitt 6.1), wurden die Wirkungsquerschnitte für die entsprechenden Prozesse künstlich heraufgesetzt, so daß in etwa 1% der Ereignisse die gewünschte Reaktion auftrat.

6.4 Die Anpassung an die Daten

Beim Übergang von den "Hit-Daten", die die Information über die deponierten Energien enthalten, zu den in den ADCs und TDCs gespeicherten digitalen Repräsentationen der durch die "Hits" erzeugten Signale muß man vereinfachende Annahmen machen, um den Rechenaufwand und die Programmierarbeit in Grenzen zu halten. Dazu wird ein einfaches Modell der benötigten Transformation entworfen, das noch von einem oder

mehreren Parametern abhängen darf. Diese Parameter werden dann empirisch durch Anpassung von gewissen Kontrollverteilungen an die gemessenen Daten bestimmt. Zum Beispiel verwendet man für die Bestimmung der auf den Kathodenstreifen induzierten Signale ein statisches Modell, bei dem man die Ladungsverteilung auf der Kathodenebene berechnet, die von einer Punktladung auf den Anoden influenziert wird. Die Effekte der Signalausbreitung auf den Streifen und Übersprechungseffekte werden dabei vernachlässigt. Statt dessen werden Parameter wie Rauschamplitude, Kalibrationsfaktor und Nullpunktswert eingeführt, die es erlauben, die gemessenen und simulierten Spektren der Kathodenamplituden empirisch aneinander anzupassen. Im einzelnen wurden folgende Größen angepaßt:

- Für die Anodendrähte:
 - Die Verteilung der "Clustergrößen" in jeder Kammer. Sie bestimmt die erreichte $r\phi$ Ortsauflösung der Kammern. Die angepaßten Parameter sind: der Schwellenwert für die minimal zu deponierende Energie in jeder Drahtzelle und die "aktive" Dicke der Kammern (der aktive Bereich der Kammer ist der Bereich, aus dem die durch die Ionisation der Gasatome erzeugten Ladungsträger zur Anode driften können, ohne vorher zu rekombinieren).
 - Die Nachweiswahrscheinlichkeiten ε_i der Kammern. Die Anpassung an die gemessenen Werte der ε_i erfolgte, indem jeder angesprochene Draht mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon_i$ "abgestellt" wurde.
- Für die Kathodenstreifen:
 - Die Amplitudenspektren für die Innen- und Außenseiten der Kammern mit Streifenauslese. Die angepaßten Parameter waren: eine Nullpunktskorrektur, ein Kalibrationsfaktor.
 - Die Verteilung der Clustergrößen für die Kammern mit WCRS Auslese (siehe Abschnitt 3.3). Hierzu mußte zusätzlich zu den beiden letztgenannten Parametern ein Schwellenwert festgelegt werden.
 - Die z Ortsauflösung (Spalte "einzel" in Tabelle 5.2). Dazu wurde dem Kathodensignal ein gaußförmiges Rauschspektrum

mit der Breite als Parameter überlagert. Es zeigte sich, daß die Ortsauflösung vollkommen durch dieses Rauschen der Elektronik bestimmt wird (und nicht durch die Breite der Kathodenstreifen).

- Für das Hodoskop: Die Verteilung der Clustergröße. Der Parameter ist hier die minimal zu deponierende Energie, die zu einem Ansprechen der Diskriminatoren führt.
- Für das Target: Die Verteilung der Größen A_{fast} und A_{slow} . Für jeden Targetzähler wurde ein Eichfaktor, eine Nullpunktskorrektur und eine Rauschamplitude festgelegt.

Die Parameter für die Kammerdaten und das Hodoskop wurden aus dem Vergleich von gemessenen und simulierten Michel-Ereignissen gewonnen. Für das Target wurde die Anpassung entsprechend der in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen Methode durchgeführt.

Für die Bestimmung der "globalen" Nachweiswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zerfallsprozesse war es entscheidend, die zusätzlich im Detektor auftretenden Signale ("Reste" von Spuren aus vorangegangenen Zerfällen, schwingende Kanäle, von der Außenwelt direkt in die Verstärkerelektronik eingestreute Signale) zu berücksichtigen. Diese "Hintergrunde" konnten aber mitgemessen werden, indem ein spezielles Magnetband bei normalen Strahlbedingungen, aber mit einer zeitlich zufällig gestarteten Auslese aufgenommen wurde. Diese Daten konnten dann den simulierten Ereignissen "beigemischt" werden. Die Monte Carlo Ereignisse wurden mit der Stoppverteilung im Target erzeugt, die sich aus der Vertexverteilung der gemessenen $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_\mu \nu_e e^+ e^-$ Ereignisse ergab.

Kapitel 7

Ergebnisse

7.1 Die Selektion der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse

Im folgenden soll beschrieben werden, wie man ausgehend von den Ereignissen, die die Bedingungen der $r\phi z$ Analysestufe erfüllten (siehe Abschnitt 5.1), die $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse isolieren konnte. Dazu wurde für die verbliebenen Ereignisse ein Vertexfit durchgeführt, bei dem verlangt wurde, daß der Vertex auf dem aktiven Teil des Targets lag. Als Maß für die Vertexgüte wurde die im Anhang A definierte Wahrscheinlichkeitsfunktion $PROB(\chi_V^2, N_{DF})$ verwendet. Die Größe χ_V^2 beschreibt die "totale Abweichung" der sich aus dem Spurfit ergebenden Spurparameter von den sich aus dem Vertexfit ergebenden Spurparametern, und N_{DF} beschreibt die Anzahl der Freiheitsgrade beim Vertexfit. Für die folgenden Verteilungen wurden nur solche Ereignisse zugelassen, für die $PROB(\chi_V^2, N_{DF}) > 0.01$ gilt. Bild 7.1 zeigt die Zeitverteilung¹ dieser Ereignisse. Aufgetragen ist die Zeitdifferenz $t_{e^+}^< - t_e$ gegen $t_{e^+}^> - t_e$, wobei $t_{e^+}^<$ die Zeit der positiven Spur ist, die zusammen mit der negativen Spur die kleinere invariante Masse bildet ("Positron A"), $t_{e^+}^>$ die Zeit der anderen positiven Spur ("Positron B") und t_e die Zeit der negativen Spur. Man erkennt, daß bei fast allen Ereignissen das Positron A innerhalb der Zeitauflösung des Detektors gleichzeitig mit dem Elektron entsteht, wogegen das Positron B häufig *nicht* mit dem Elektron zeitlich korreliert ist. Es handelt sich dabei um Ereignisse, bei denen ein e^+e^- -Paar in zufälliger Koinzidenz mit einem weiteren Positron erzeugt wurde. Bild 7.2 zeigt die Verteilung des Öffnungswinkels zwischen dem Elektron und dem Positron A für Ereignisse, bei denen das Positron B zeitlich unkorreliert

¹ Alle im folgenden genannten Zeitgrößen sind als nullpunkts-, walk- und flugzeitkorrigierte Werte zu verstehen.

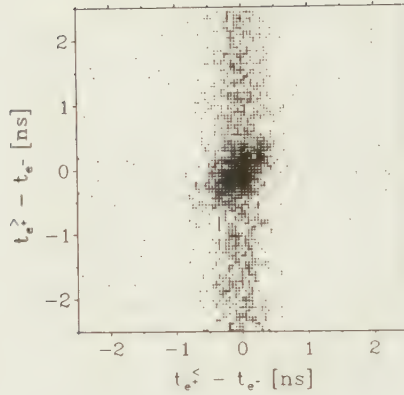


Abbildung 7.1: Die Zeitverteilung für Ereignisse, deren Vertex auf dem aktiven Teil des Targets liegt

zum Elektron entstanden ist ("einfach-zufällige Ereignisse"). Diese Ereignisse können als "Bhabhaereignisse" (siehe Fußnote S.40) interpretiert werden, wie der Vergleich der Verteilung mit simulierten Bhabhaereignissen beweist. Praktisch der gesamte Untergrund ist durch diese einfach-zufälligen Ereignisse (im Gegensatz zu zweifach-zufälligen Ereignissen, bei denen beide Positronen mit dem Elektron zeitlich unkorreliert auftreten) erklärbar. Daher wurde als Maß für die Gleichzeitigkeit, mit der die drei Teilchen entstanden sind, die Größe

$$t' = \sqrt{\frac{(t_{e^+}^{>} - t_{e^-})^2 + (t_{e^+}^{<} - t_{e^-})^2}{2}}$$

definiert. Bild 7.3 zeigt die Verteilung dieser Größe für dieselben Ereignisse wie in Bild 7.1. Die einfach zufälligen Ereignisse liefern eine flache Verteilung für diese Größe, während korrelierte Ereignisse sich beim Nullpunkt häufen müssen ("prompter Peak"). Man erkennt, daß korrelierte Ereignisse einen Wert von t' unterhalb von 600 ps haben. Bei der gemessenen Zeitauflösung von 180 ps pro Meantime und der Annahme von gaußverteilten Abweichungen bei der Zeitmessung ergibt die Monte Carlo Simulation, daß 99% der korrelierten Ereignisse diese Bedingung erfüllen. Im prompten Bereich $t' < 600\text{ps}$ liegen 1070 ± 22 korrelierte Ereignisse und 460 ± 22 zufällige Ereignisse.

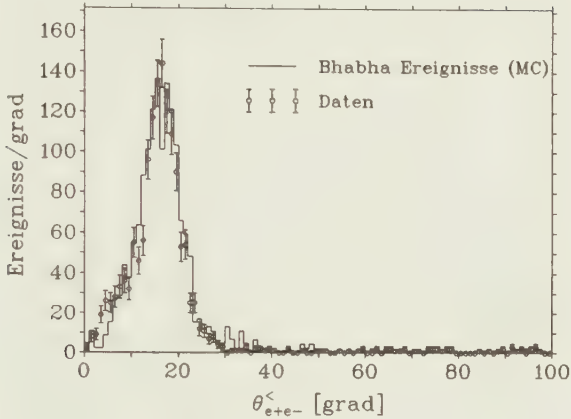


Abbildung 7.2: Die Verteilung des Öffnungswinkels zwischen dem e^- und dem e^+ , das mit dem Elektron zusammen die kleinere invariante Masse bildet, für zufällige Ereignisse.

Bild 7.4 zeigt die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $|\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c|$ für diese prompten Ereignisse. Die $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse erwartet man entlang der Linie

$$K \equiv \sum_{i=1}^3 E_i + \left| \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c \right| = m_\pi c^2$$

Für $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ Ereignisse gilt dagegen $K < m_\mu c^2$, da in diesem Fall das zweite Neutrino zusätzlich Energie forttragen kann. Diese Bedingungen werden von den gemessenen Ereignissen nicht exakt, sondern nur innerhalb des Auflösungsvermögens des Detektors erfüllt. Daher ist die "μ-Kante" bei einem Wert von $K = 112$ MeV eingetragen, also 6.3 MeV überhalb der μ Masse von 105.7 MeV. Aus der Verteilung von K läßt sich abschätzen, daß 666 ± 10 " $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ " Ereignisse im Intervall $80 \text{ MeV} < K < 112 \text{ MeV}$ und 210 ± 15 " $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ " Ereignisse im Intervall $128 \text{ MeV} < K < 150 \text{ MeV}$ ("Pionpeak") gemessen wurden. Die Bezeichnung " $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ " steht hierbei für echte $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ Ereignisse und $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e \gamma$ Ereignisse, bei denen das Photon extern im Target in ein e^+e^- Paar konvertiert ist. Entsprechend ist die Bezeichnung " $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ " zu verstehen. Das Signal/Untergrund Verhältnis im Pionpeak hat nach diesem Vertexfit einen Wert von 1:1.

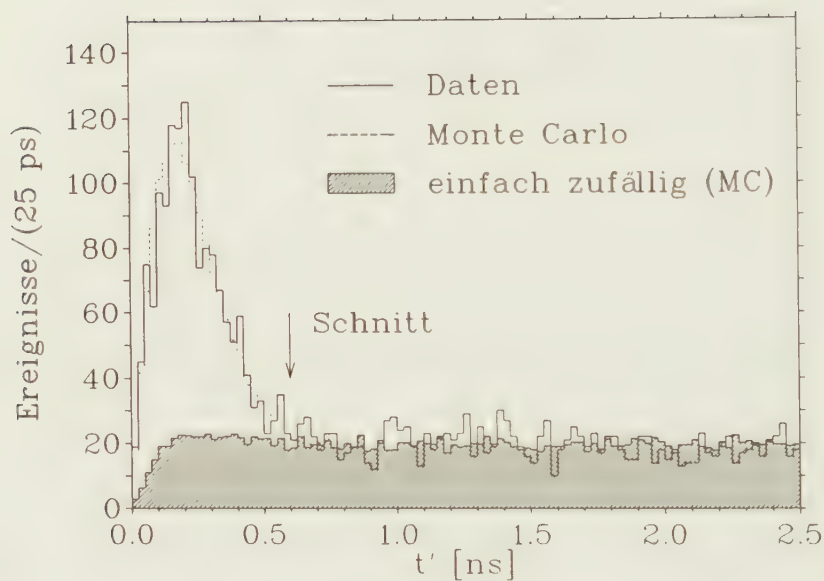


Abbildung 7.3: Die Verteilung von t' für Ereignisse, deren Vertex auf dem aktiven Teil des Targets liegt

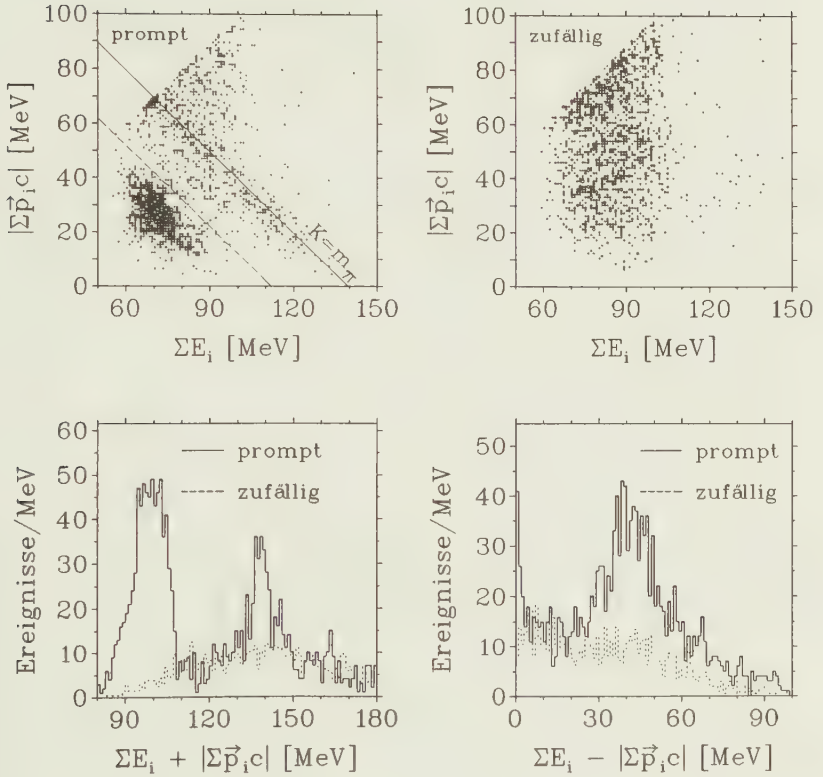


Abbildung 7.4: Die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $|\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c|$ für prompte und zufällige Ereignisse, deren Vertex auf dem aktiven Teil des Targets liegt

Um den Untergrundbeitrag zu den " $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ " Ereignissen zu reduzieren, kann jetzt die Korrelation zwischen der Vertexposition und der Position des angesprochenen Targetzählers ausgenutzt werden. Bild 7.5 zeigt die Vertexverteilung der Ereignisse mit $128 \text{ MeV} < K < 150 \text{ MeV}$ bzw. $80 \text{ MeV} < K < 112 \text{ MeV}$, wobei die Vertexposition im Uhrzeigersinn jeweils so rotiert wurde, daß der angesprochene Targetzähler bei $\varphi = 0$ lag. Im Pion-Massenbereich ist das π -Stoppsignal mit der Vert-

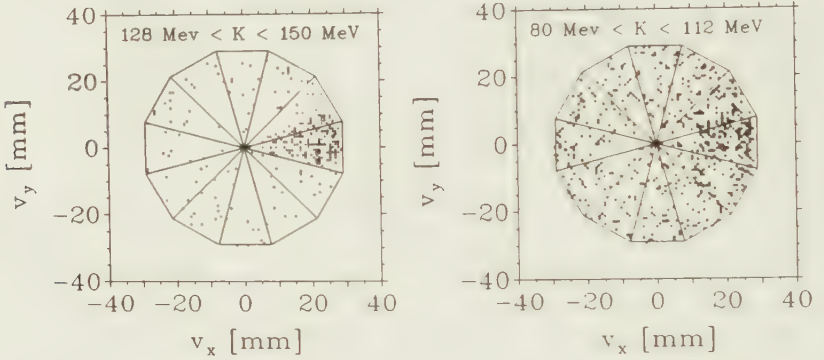


Abbildung 7.5: "Rotierte" Vertexverteilung (siehe Text) in der $r\phi$ Projektion für Ereignisse mit $128 \text{ MeV} < K < 150 \text{ MeV}$ und $80 \text{ MeV} < K < 112 \text{ MeV}$. Das Bild enthält nur die Ereignisse, bei denen genau ein Targetzähler angesprochen hat.

exposition deutlich korreliert. Man erkennt außerdem, daß das Target um 5° im negativen Uhrzeigersinn gegenüber den Drahtkammern verdreht war. Für die " $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$ " Ereignisse ist die Korrelation dagegen wesentlich schwächer und hat ihre Ursache darin, daß die Zerfallsprodukte eine Korrelation erzwingen können, wenn sie genug Energie im Targetzähler deponieren, um die Triggerschwelle zu überschreiten.

Daher wurde ein weiterer Vertexfit durchgeführt, bei dem verlangt wurde, daß der Vertex auf einem der angesprochenen Targetzähler liegt, wobei die Verdrehung des Targets und der Energieverlust sowie die Vielfachstreuung der Spuren beim Durchgang durch das Target berücksichtigt wurden (siehe Anhang A). Dieser Vertexfit lieferte ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $PROB(\tilde{\chi}_V^2, \tilde{N}_{DF})$, und es wurde wieder verlangt, daß die Bedingung $PROB(\tilde{\chi}_V^2, \tilde{N}_{DF}) > 0.01$ erfüllt war. Zusätzlich wurde

in diesem Schritt die Information aus der "Pulsshape-Analyse" benützt (Abschnitt 5.4.2) und verlangt, daß die Verzerrungsgröße V die Bedingung $V < 20$ erfüllt; damit wurde eine gewisse Verzerrung des Signals durch die drei geladenen Zerfallsprodukte im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall noch zugelassen. Für Ereignisse, bei denen das Zerfallssignal im Hodoskop bis auf die Flugzeitdifferenz innerhalb ± 1 ns gleichzeitig mit dem " π -Stopp" Signal auftrat, wurde zusätzlich verlangt, daß die A_{fast} -Amplitude einen Minimalwert überschritt, der einer deponierten Energie von 2 MeV entsprach. Durch diese Bedingung wurden Ereignisse unterdrückt, bei denen die Korrelation zwischen Target und Vertex durch die Zerfallsprodukte vorgetäuscht wurde.

Bild 7.6 zeigt für die verbliebenen prompten Ereignisse wieder die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $|\sum_{i=1}^3 \vec{p}_{iC}|$. Die " $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ " Ereignisse werden stark unterdrückt, lediglich 181 ± 5 Ereignisse erfüllen die Bedingungen. Dagegen verbleiben 216 ± 7 " $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ " Ereignisse über einem Untergrund von 47 unkorrelierten Ereignissen. Dieser Untergrund kann nicht weiter unterdrückt werden, ohne einen Teil des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Phasenraums aufzugeben. Wie oben beschrieben besteht der zufällige Untergrund aus "Bhabhaereignissen". Diese Ereignisse sind dadurch charakterisiert, daß das Elektron und das "Positron A" (s.o.) einen Öffnungswinkel unter 30° haben und zusammen eine Energie von weniger als 56 MeV aufweisen, da die gesamte Energie von einem Michelpositron geliefert wird. Der Anteil der $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Ereignisse mit extern konvertiertem Photon an den " $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ " Ereignissen kann ebenfalls durch eine Bedingung für den Öffnungswinkel von Elektron und Positron A abgetrennt werden. Eine Monte Carlo Simulation zeigt, daß bei 99% der $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Zerfälle, bei denen das Photon extern konvertiert, das entstehende e^+e^- Paar einen Öffnungswinkel unter 18° hat. Der Phasenraum wird also insgesamt durch folgende Bedingungen eingeschränkt:

1. $\{\alpha_{e^+e^-}^< > 30^\circ \text{ oder } E_{e^+}^< + E_{e^-}^> > 60 \text{ MeV}\}$ und
2. $\{\alpha_{e^+e^-}^< > 18^\circ\}$

Der dadurch unterdrückte Teil des Phasenraums ist durch den IB-Anteil im Matricelement dominiert, so daß die für die Bestimmung der Formfaktoren wichtigen Ereignisse erhalten bleiben. Bild 7.7 zeigt die Verteilungen für die verbliebenen Ereignisse. Im Intervall $128 \text{ MeV} < K < 152 \text{ MeV}$ liegen 92 Ereignisse. Aus den Ereignissen im zufälligen Zeitfenster läßt

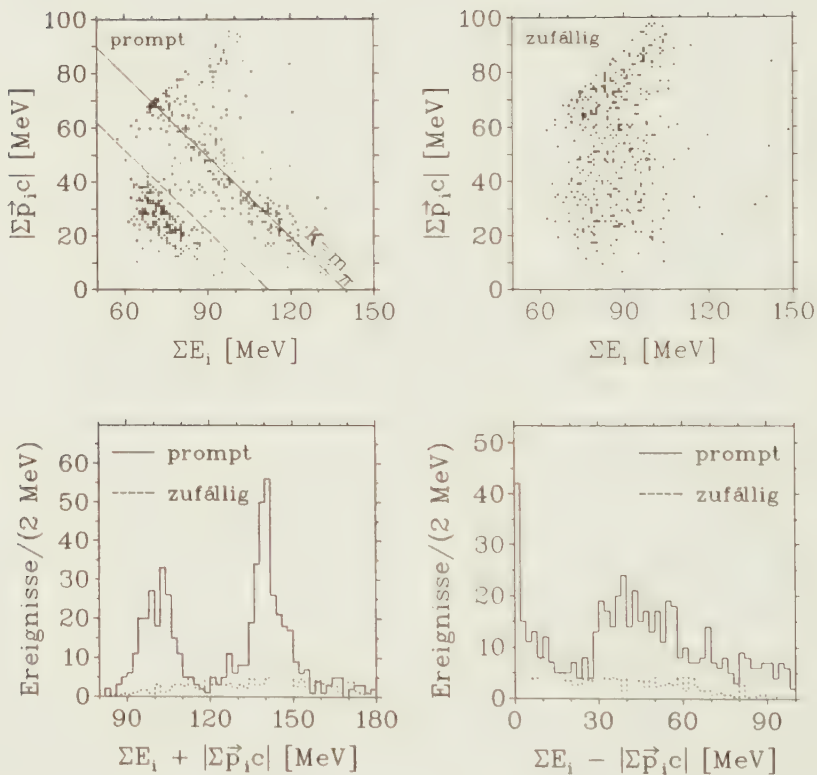


Abbildung 7.6: Die Verteilung der Größen $\Sigma_{i=1}^3 E_i$ und $|\Sigma_{i=1}^3 \vec{p}_i c|$ für prompte und zufällige Ereignisse, deren Vertex auf einem der angesprochenen Targetzähler liegt

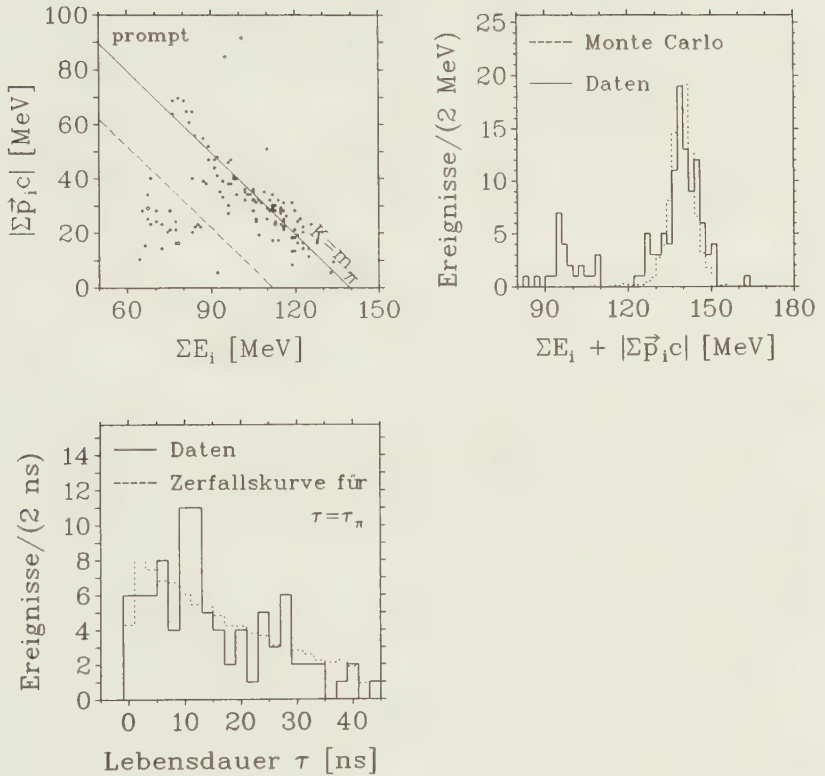


Abbildung 7.7: Die Verteilung der Größen $\sum_{i=1}^3 E_i$ und $|\sum_{i=1}^3 \vec{p}_{i,c}|$ für prompte Ereignisse bei eingeschränktem Phasenraum (siehe Text) und Lebensdauerkurve für Ereignisse mit $128 \text{ MeV} < K < 152 \text{ MeV}$.

sich abschätzen, daß unter diesen Ereignissen noch ein Untergrundereignis liegt. Die Verteilung der Lebensdauer $\tau = t_{\text{Zerfall}} - t_{\text{Stopp}}$ stimmt mit der erwarteten Zerfallskurve des Pions überein, das eine Lebensdauer von $\tau_\pi = 26$ ns hat.

Im Bild 7.8 und im Bild 7.9 sind Beispiele der gemessenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^-\nu_e$ Ereignisse gezeigt. Im Bild 7.8 ist ein Ereignis gezeigt, bei dem das eine e^+e^- Paar eine kleine invariante Masse bildet (kleiner Öffnungswinkel) und daher als " $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ ähnliches" Ereignis aufgefaßt werden kann, bei dem das e^+e^- Paar die Rolle des Photons übernimmt. Das Bild 7.9 zeigt ein Ereignis, das keine Entsprechung im $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Zerfall hat. Hier ist das virtuelle Photon weit von der Massenschale entfernt, und entsprechend groß ist die invariante Masse des e^+e^- Paares.

7.2 Das Verzweigungsverhältnis

Aus der Anzahl der im eingeschränkten Phasenraum P^* gefundenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse (91 ± 1) und der totalen Anzahl gestoppter Pionen im aktiven Teil des Targets läßt sich das Verzweigungsverhältnis BR^* des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfalls für Ereignisse in P^* berechnen, wenn man die totale Nachweiswahrscheinlichkeit des SINDRUM Detektors für diese Ereignisse kennt. Der Phasenraum ist dabei sowohl durch den Akzeptanzbereich des Detektors als auch durch die auf Seite 87 genannten kinematischen Bedingungen eingeschränkt. Um auf das totale Verzweigungsverhältnis für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall ohne Einschränkung des Phasenraums extrapolieren zu können, müssen die Werte der schwachen Formfaktoren F_V, F_A und R bekannt sein (Abschnitt 7.3.1).

Tabelle 7.1 faßt die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Triggerstufen und der Analyseprogramme zusammen. Fast alle Zahlenwerte wurden aus simulierten $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignissen bestimmt. Die Akzeptanz Ω wird durch den Raumwinkel, der vom Detektor abgedeckt wird, und die Höhe des Magnetfelds bestimmt. Die Ungenauigkeit der Magnetfeldbestimmung ergibt einen Fehler von 2.5% für den Wert von Ω . Die Akzeptanz und der Unterdrückungsfaktor r hängen von den Formfaktoren ab. Die angegebenen Zahlenwerte gelten für die "Standardwerte" der Formfaktoren. Die Abhängigkeit von Ω und r als Funktion der Formfaktoren wird in Abschnitt 7.3.1 besprochen. In den Werten für ε_{CPS} und ε_{TPS} sind der Einfluß der Kammer-Nachweiswahrscheinlichkeiten und eines zeitweiligen Ausfalls von einem der Hodoskop-Szintillatoren berücks-

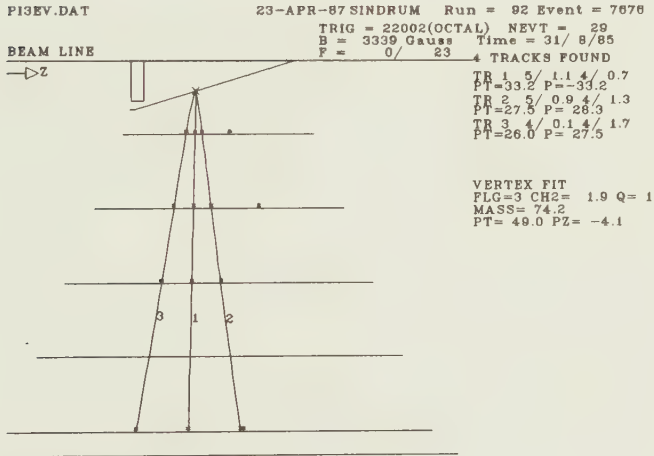
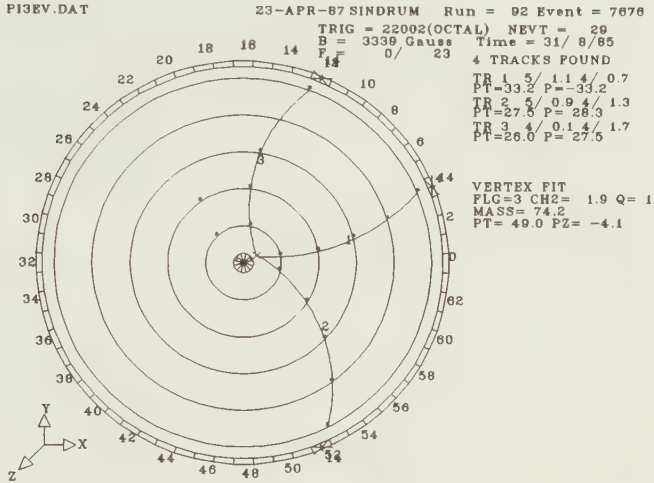


Abbildung 7.8: $r\varphi$ - und rz -Projektion eines $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignis mit kleiner invarianter Masse des e^+e^- Pairs (Spur 1 und 2). In der $r\varphi$ -Projektion ist nur der Targetteil mit $z > 0$ gezeichnet.

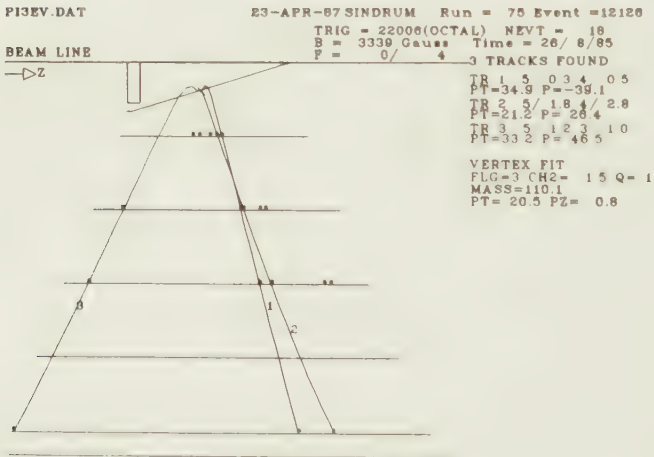
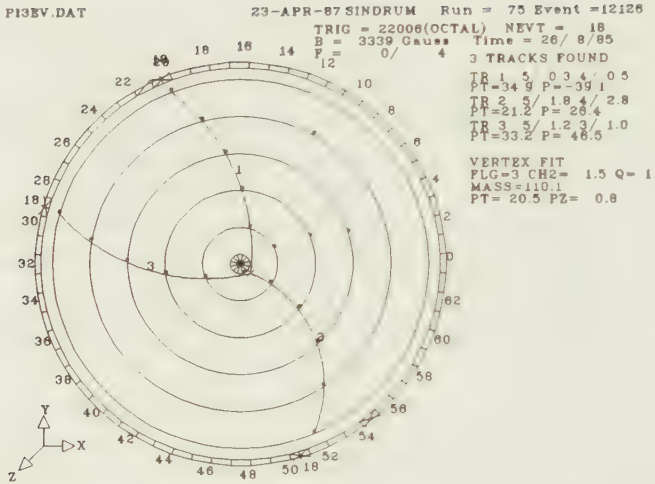


Abbildung 7.9: $r\phi$ - und rz -Projektion eines $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^- \nu_e$ Ereignisses mit großer invarianter Masse der e^+e^- Paare. In der $r\phi$ -Projektion ist nur der Targetteil mit $z > 0$ gezeichnet.

Tabelle 7.1: Akzeptanz des Detektors und Nachweiswahrscheinlichkeiten der Triggerstufen und Analyseprogramme

Akzeptanz des Detektors (Magnetfeld, Raumwinkel)	Ω	$(3.0 \pm 0.1)\%$
Trigger: CPS	ε_{CPS}	91%
Target	ε_{Tar}	95%
TPS	ε_{TPS}	79%
TCR	ε_{TCR}	94%
Total	ε_T	$(64 \pm 4)\%$
Zeitfenster (0..42ns)	ε_t	$(80 \pm 1)\%$
Online-Filter	ε_F	$(96.5 \pm 2)\%$
$r\phi$ Analyse	$\varepsilon_{r\phi}$	$(90.5 \pm 2)\%$
$r\phi z$ Analyse	ε_z	$(88.5 \pm 2)\%$
Vertexfit	ε_V	$(91 \pm 2)\%$
Totale Nachweiswahrscheinlichkeit	ε_{tot}	$(36 \pm 3)\%$
Einschränkung des Phasenraums	r	71%

sichtigt. Der Wert von ε_{Tar} beinhaltet ebenfalls den zeitweiligen Ausfall eines Targetzählers, wobei dieser Effekt aus den gemessenen Zählraten der π -Stopp Signale bestimmt werden konnte. Die Nachweiswahrscheinlichkeit des Filters wurde aus dem Anteil der ungefiltert akzeptierten Ereignisse bestimmt, indem festgestellt wurde, wieviel von den nach der $r\phi z$ Analysestufe verbliebenen Ereignissen vom Filter verworfen worden wären.

Aus der Analyse des vorangegangenen $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ Experiments [51] ist bekannt, daß die Nachweiswahrscheinlichkeit der $r\phi z$ -Analysestufe in der Simulation höher war als bei den gemessenen Daten und außerdem von der Topologie der Ereignisse abhing. Daher wurde in diesem Experiment großer Wert auf die korrekte Simulation der Kathodenauslese gelegt. Die Nachweiswahrscheinlichkeit der $r\phi z$ Analyse konnte aus den Daten mit Bhabhaereignissen (kleine Öffnungswinkel zwischen den Spuren) und Ereignissen, die Rückkehrspuren enthielten (Öffnungswinkel nahe 180°), bestimmt werden. Dabei wurden in der $r\phi$ -Projektion die entsprechenden e^+e^- -Paare selektiert und festgestellt, ob nach der z-Analyse beide Spuren wiedergefunden werden konnten. Mit den simulierten Bhabhaereignissen und Rückkehrspuren erhielt man bis auf Abweichungen von 1% die

gleichen Nachweiswahrscheinlichkeiten, wenn man den gemessenen Untergrund zu den simulierten Ereignissen dazumischte und den zeitweiligen Ausfall der WCRS Elektronik (6% der Ereignisse enthielten keine WCRS Daten) explizit in die Simulation einbaute. Aus der guten Übereinstimmung der Nachweiswahrscheinlichkeiten von simulierten und gemessenen Ereignissen für e^+e^- -Paare bei stark unterschiedlichen Spurkonfigurationen kann geschlossen werden, daß auch die Nachweiswahrscheinlichkeit für Ereignisse mit drei nachzuweisenden Teilchen von der Monte Carlo Simulation richtig wiedergegeben wird.

Mit diesen Werten ergibt sich aus der Anzahl der gefundenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^-\nu_e$ Ereignisse im eingeschränkten Teil des Phasenraums $N^* = 91 \pm 1$, der totalen Nachweiswahrscheinlichkeit $\varepsilon_{tot} = (36 \pm 3)\%$ und der Anzahl gestoppter Pionen $N_{\pi-Stopp} = (4.02 \pm 0.27) \cdot 10^{12}$ das Verzweigungsverhältnis BR^* :

$$BR^* = N^*/(N_{\pi-Stopp} \cdot \varepsilon_{tot}) = (6.3 \pm 0.7^{stat} \pm 0.7^{syst}) \cdot 10^{-11}.$$

Unter der Annahme der Standardwerte für die Formfaktoren ergäbe sich daraus ein totales Verzweigungsverhältnis BR für den $\pi^+ \rightarrow e^+e^+\nu_e$ Zerfall von

$$BR = BR^*/(\Omega \cdot r) = (3.0 \pm 0.31^{stat} \pm 0.33^{syst}) \cdot 10^{-9}.$$

Im Abschnitt 7.3 wird gezeigt, daß sich aus den gemessenen Verteilungen für den Formfaktor R ein Wert von 0.061 ± 0.008 ergibt. Setzt man bei der Berechnung von Ω und r diesen Meßwert zusammen mit den Standardwerten für F_V und F_A ein, so erhält man für Ω und r die Werte 2.7% und 68% und damit ein Verzweigungsverhältnis von

$$BR = BR^*/(\Omega \cdot r) = (3.3 \pm 0.34^{stat} \pm 0.52^{syst}) \cdot 10^{-9}.$$

wobei jetzt im systematischen Fehler der Fehler von R mit enthalten ist.

7.3 Die schwachen Formfaktoren des Pions

Um aus den gemessenen Ereignissen auf die Werte der Formfaktoren rückschließen zu können, gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten:

- Aus dem Verzweigungsverhältnis:

Hierbei vergleicht man die Anzahl der gemessenen Ereignisse N_{mess} mit der Anzahl der erwarteten Ereignisse N_{erw} , wobei N_{erw} von

den Formfaktoren und der absoluten Normierung (totale Anzahl gestoppter Pionen, totale Nachweiswahrscheinlichkeit etc.) abhängt.

- Aus der Verteilung der Ereignisse im Phasenraum:

Hierbei vergleicht man die gemessene Verteilung der Ereignisse mit der durch das Matricelement vorausgesagten Verteilung, die von den Formfaktoren abhängt, *ohne* die absolute Normierung kennen zu müssen.

7.3.1 Die Maximum-Likelihood-Methode

Die mathematische Methode, mit der der Vergleich von Verteilungen in einem fünfdimensionalen Phasenraum durchgeführt werden kann, beruht auf dem "Maximum-Likelihood-Prinzip". Die sonst häufig verwendete " χ^2 Methode" ist durch das bei ihr notwendige "binning" der Daten (Zusammenfassen von Ereignissen zu Klassen oder Kanälen = Bins) auf den Vergleich von ein- bis zweidimensionalen Verteilungen beschränkt [61,73,74]. Bei der Maximum-Likelihood-Methode wird als Maß für die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den von der Theorie vorhergesagten Verteilungen die "Likelihoodfunktion" L definiert:

$$L(\vec{\alpha}) = \prod_{i=1}^{N_{\text{mess}}} p_i(\vec{\alpha}) \quad \text{mit} \quad p_i(\vec{\alpha}) = \frac{|M(\vec{\alpha}, \vec{x}_i)|^2}{\int_V |M(\vec{\alpha}, \vec{x})|^2 \varepsilon(\vec{x}) d\vec{x}} \quad \text{und} \quad \vec{\alpha} = (F_V, F_A, R) \quad (7.1)$$

Hierbei ist $|M|^2$ das $\pi^+ \rightarrow e^+e^-e^-\nu_e$ Matricelement und p_i die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, das Ereignis i zu beobachten. Das Integral erstreckt sich über den gesamten Phasenraum, wobei die Akzeptanz und die Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors für ein durch $\vec{x}$ charakterisiertes Ereignis in der Funktion $\varepsilon(\vec{x})$ berücksichtigt wird. Als "Meßwerte" für die Formfaktoren $\vec{\alpha}$ gelten dann die Werte, die die Likelihoodfunktion maximieren. Die Übereinstimmung ist also dann am besten, wenn die Theorie die gemessene Verteilung als *wahrscheinlichste* Verteilung vorhersagt.

Bei diesem Ansatz für L wird vorausgesetzt, daß alle gemessenen Ereignisse wirkliche $\pi^+ \rightarrow e^+e^-e^-\nu_e$ Zerfälle sind, da nur dann ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung durch das Matricelement $|M|^2$ beschrieben werden kann. Diese Voraussetzung ist bei den 92 im eingeschränkten Teil des Phasenraums gefundenen Ereignissen in guter Näherung erfüllt, da nur ein Untergrundereignis erwartet wird. Eine Simulation zeigt, das ein ein-

ziges Untergrundereignis zu keiner nennenswerten Verfälschung der Vorhersage für die Formfaktoren führt; die Verfälschung ist klein gegenüber dem statistischem Fehler.

Das Normierungsintegral im Nenner von p_i wurde mit der Monte Carlo Methode aus simulierten $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfällen berechnet. Für jedes gemessene Ereignis i müssen aus den Impulsvektoren der geladenen Teilchen die fünf kinematischen Größen $\vec{x}_i$ (z.B. die Energien der geladenen Teilchen und die Winkel zwischen den Positronen und dem Elektron) bestimmt werden. Dabei garantiert der kinematische Vertexfit (siehe Anhang A), daß das rekonstruierte Ereignis auch tatsächlich im Phasenraum des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfalls liegt, in dem die Bedingung $K = m_\pi c^2$ erfüllt wird (siehe Abschnitt 7.1).

Für die 92 gemessenen Ereignisse wird das Maximum der Likelihoodfunktion für folgende Werte der Formfaktoren angenommen:

$$F_V = 0.030_{-0.013}^{+0.018} \mid F_A = 0.015_{-0.013}^{+0.014} \mid R = 0.059_{-0.014}^{+0.020} \quad (7.2)$$

Das Maximum wurde mit dem Programm "MINUIT" [81] bestimmt. Die angegebenen Fehler sind statistische Fehler, die sich aus dem Verlauf der Likelihoodfunktion in der Nähe des Maximums ergeben [82]. Zusätzlich müssen die Meßfehler der kinematischen Variablen berücksichtigt werden. Der Einfluß dieser Fehler auf den Gesamtfehler der Formfaktoren kann auf zwei verschiedene Arten bestimmt werden:

- aus Monte Carlo Ereignissen, indem man sowohl die rekonstruierten kinematischen Größen als auch die nur für simulierte Ereignisse bekannten tatsächlichen kinematischen Größen in die Likelihoodfunktion einsetzt und die sich jeweils ergebenden Werte der Formfaktoren vergleicht,
- aus den gemessenen Ereignissen, indem die rekonstruierten Impulsvektoren im Rahmen ihrer durch die Kovarianzmatrizen beschriebenen Fehler zufällig variiert werden und der Einfluß dieser Variation auf die Formfaktoren berechnet wird (Fehlerfortpflanzung mit Monte Carlo Methoden).

Beide Methoden zeigen, daß der durch die Meßfehler der Impulsvektoren verursachte Fehler zwischen 10% und 30% des statistischen Fehlers beträgt. Der Gesamtfehler wird dadurch also um weniger als 5% erhöht, weshalb im folgenden dieser Fehlerbeitrag vernachlässigt wird.

Wie die Resultate in Gleichung 7.2 zeigen, ist der Betrag des Vektorformfaktors F_V in Übereinstimmung mit der Vorhersage aus der CVC-Hypothese ($|F_V^{CVC}| = 0.0255$). Das Vorzeichen von F_V ist positiv, bezogen auf das durch Konvention festgelegte *positive* Vorzeichen der Pion-Zerfallskonstante f_π (siehe Abschnitt 2.1). Daher wurde im weiteren der Wert von F_V auf den durch die CVC-Hypothese verlangten Betrag festgelegt, und nur die beiden Axialvektorformfaktoren wurden noch als freie Parameter behandelt. Im Bild 7.10 ist die Likelihoodfunktion L als Funktion von $\gamma \equiv F_A/F_V$ und $\xi \equiv R/F_V$ dargestellt (links oben). Eingezeichnet sind die Höhenlinien von L , ausgehend von dem durch $\oplus$ gekennzeichneten Maximum der Likelihoodfunktion. Der Abstand zweier Höhenlinien entspricht dabei der Zunahme des Fehlerbereichs für γ und ξ um jeweils eine Standardabweichung. Der Wert von γ liegt also mit 68%iger Wahrscheinlichkeit zwischen den Extremwerten der mit " σ " bezeichneten Höhenlinie (wobei der Wert von ξ völlig frei bleibt, siehe auch [82]), mit 95.4%iger Wahrscheinlichkeit zwischen den Extremwerten der " 2σ "-Linie usw. Entsprechendes gilt für den Wert von ξ . Der Wert von ξ , der sich aus der PCAC Hypothese ergibt, und die beiden möglichen Werte von γ , die sich aus dem letzten $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experiment [30] ergaben, sind mit Pfeilen markiert. Man erkennt, daß die Resultate des $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiments in Übereinstimmung mit dem *positiven* Wert γ^+ sind und im deutlichen Widerspruch zum γ^- Wert stehen. Das Wahrscheinlichkeitsverhältnis $L(\gamma^-, \xi^{PCAC})/L(\gamma^+, \xi^{PCAC})$ beträgt $1 : (4 \cdot 10^{10})$. Der von der PCAC-Hypothese vorhergesagte Wert für ξ liegt weniger als eine Standardabweichung vom ξ -Wert am Maximalpunkt entfernt.

Um auch die Information der absoluten Normierung benützen zu können, kann die Maximum-Likelihood-Methode zur "Extended-Maximum-Likelihood-Methode" erweitert werden [83]. Gegenüber der normalen Maximum-Likelihood-Methode, die nur die *Form* der Verteilungen vergleicht und implizit annimmt, daß die absolute Normierung gerade die Anzahl beobachteter Ereignisse liefert, wird jetzt zusätzlich die Wahrscheinlichkeit berechnet, bei einem gegebenen Wert der Formfaktoren gerade N_{mess} Ereignisse zu beobachten. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch eine Poissonverteilung beschrieben, die bei genügender Anzahl gemessener Ereignisse (> 20) durch eine Gaußverteilung approximiert werden kann. Man definiert daher die Funktion N für die Normierungswahr-

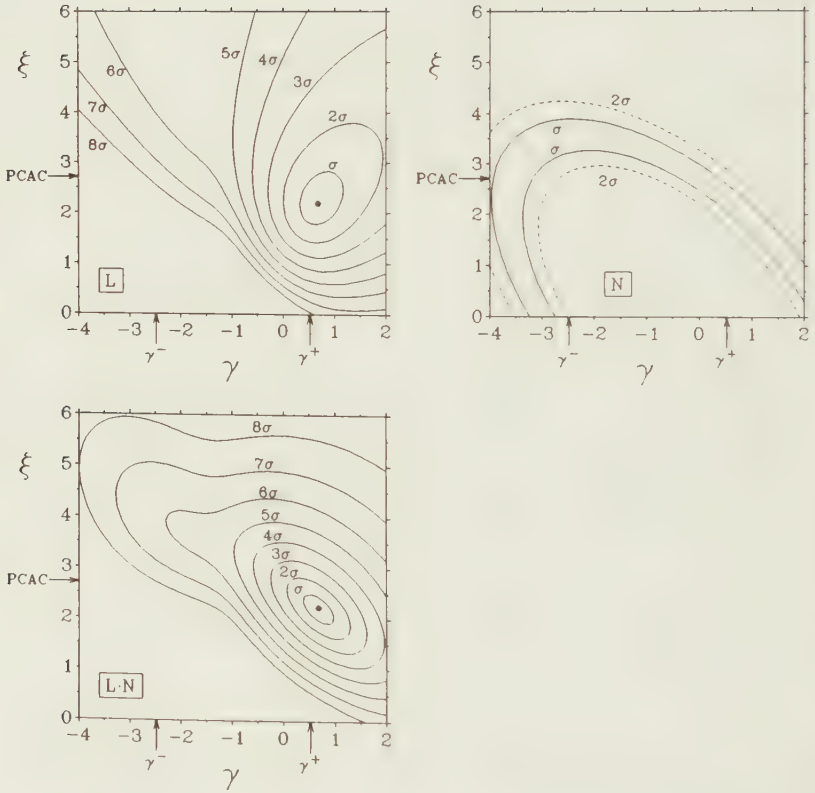


Abbildung 7.10: Höhenlinien-Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen L , N und $L \cdot N$ als Funktion der Axialvektorformfaktoren γ und ξ

scheinlichkeit wie folgt:

$$N(\vec{\alpha}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(N_{mess} - N_{erw}(\vec{\alpha}))^2 / 2\sigma^2} \quad \text{mit } \sigma^2 = \underbrace{\sqrt{N_{mess}}^2}_{stat.} + \underbrace{\sigma_{erw}^2}_{syst.} \quad (7.3)$$

N_{erw} ist dabei der Mittelwert der Anzahl zu erwartender Ereignisse, der von den Parametern $\vec{\alpha}$ (Formfaktoren) abhängt. Der Fehler dieser Größe bestimmt sich aus dem Fehler der absoluten Normierung (systematischer Fehler). Dazu kommt der statistische Fehler der gemessenen Anzahl von Ereignissen. Bild 7.10 zeigt die Höhenlinien von N als Funktion von γ und ξ . Zwischen den beiden mit "σ" bezeichneten Linien hat die Funktion N ihr Maximum. Dort liegen also die Wertepaare von γ und ξ , für die die Anzahl der erwarteten Ereignisse mit der Anzahl der gemessenen Ereignisse übereinstimmt.

Das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen L und N beschreibt nun die Wahrscheinlichkeit, Ereignisse mit der gemessenen Verteilung *und* der gemessenen Anzahl zu beobachten. Diese Produktfunktion ist ebenfalls in Bild 7.10 zu sehen. Ihr Maximum ergibt sich für die Werte

$$\gamma = 0.7 \pm 0.3 \quad \text{und} \quad \xi = 2.3 \pm 0.3 . \quad (7.4)$$

Der Wert von γ ist in Übereinstimmung mit dem Wert von $\gamma^+ = 0.52 \pm 0.06$ aus [30]. Fixiert man γ auf diesen mit sehr viel größerer Genauigkeit gemessenen Wert, so ergibt sich schließlich für ξ der Wert

$$\xi = 2.4 \pm 0.3 . \quad (7.5)$$

7.3.2 Die Überprüfung der Likelihood-Analyse

Die Auswertung der Likelihoodfunktion liefert Schätzwerte für die Parameter der Theorie, sie macht aber keinerlei absolute Aussagen über die Güte der Anpassung der theoretischen Verteilungen an die gemessenen Verteilungen. Dies liegt daran, daß dem Betrag der Likelihoodfunktion im Maximum keine physikalische Bedeutung zugeordnet werden kann, im Gegensatz zu einer χ^2 -Funktion, bei der der Funktionswert im Minimum auch direkt das Maß für die Übereinstimmung zweier Verteilungen liefert. Daher muß die Maximum-Likelihood-Methode durch einen "Signifikanztest" (Goodness-of-Fit Test) ergänzt werden, der Aussagen über die Güte der Anpassung erlaubt. Man geht dabei von der "Nullhypothese" aus, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gemessenen Daten

durch die von der Theorie gelieferten Verteilung richtig beschrieben wird. Das Ergebnis des Signifikanztests ist eine "Signifikanzwahrscheinlichkeit" (confidence level), die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich bei einer (theoretisch vorgestellten) erneuten Durchführung des Experiments eine schlechtere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ergeben würde als bei dem tatsächlich durchgeführten Experiment. Ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als eine durch Konvention festgelegte "kritische Wahrscheinlichkeit" (je nach Anwendungsfall zwischen 0.01 und 0.05), so gilt die Nullhypothese als widerlegt. Es liegt daher im Wesen des Signifikanztests, daß er die Richtigkeit der Nullhypothese nicht beweisen, sondern nur *nicht widerlegen* kann. Das hier verwendete Verfahren beruht auf dem Vergleich von Punktmengen in n -dimensionalen Räumen und ist im Anhang B beschrieben. Für das $\pi^+ \rightarrow e^+ e^- \nu_e$ Experiment erhält man für die Signifikanzwahrscheinlichkeit einen Wert von über 0.54, die damit deutlich über der kritischen Wahrscheinlichkeit liegt.

Bild 7.11 zeigt für einige kinematischen Größen den Vergleich der gemessenen Verteilungen mit den theoretisch erwarteten Verteilungen ($\gamma = 0.52$). Zusätzlich ist die simulierte Verteilung eingezeichnet, die man bei einem Wert von $\gamma = -2.48$ erwarten würde. Zur Verdeutlichung sind ebenfalls die Differenzen der gemessenen Verteilung und der beiden simulierten Verteilungen ($\square$ für $\gamma = 0.52$ und $+$ für $\gamma = -2.48$), geteilt durch ihren statistischen Fehler, aufgetragen. Die simulierten Verteilungen sind dabei jeweils auf die gemessene Anzahl der Ereignisse normiert. Hierbei bezeichnet E_ν die Neutrinoenergie, $E_+ (E_-)$ die Energie des Positrons, das mit dem Elektron zusammen die kleinere (größere) invariante Masse bildet, $\theta_{e^+e^-}$ und $\theta_{e^-e^-}$ die dazugehörigen Öffnungswinkel und S das "normierte Spatprodukt" der Impulsvektoren der geladenen Teilchen:

$$S = \frac{(\vec{p}_- \times \vec{p}_+) \cdot \vec{p}_+}{|\vec{p}_-| \cdot |\vec{p}_+| \cdot |\vec{p}_+|}$$

Schon im eindimensionalen Spektrum der Neutrinoenergie ist deutlich zu erkennen, daß der positive γ -Wert zu einer besseren Übereinstimmung mit den gemessenen Ereignissen führt als der negative γ -Wert. Das Spatprodukt S ist eine Größe, die eine mögliche Verletzung der Zeitumkehrinvarianz im $\pi^+ \rightarrow e^+ e^- \nu_e$ Zerfall anzeigen könnte. Die Übereinstimmung der gemessenen mit der simulierten Verteilung ist bei dieser Größe nicht überzeugend, ein Signifikanztest ergibt eine Signifikanzwahrscheinlichkeit

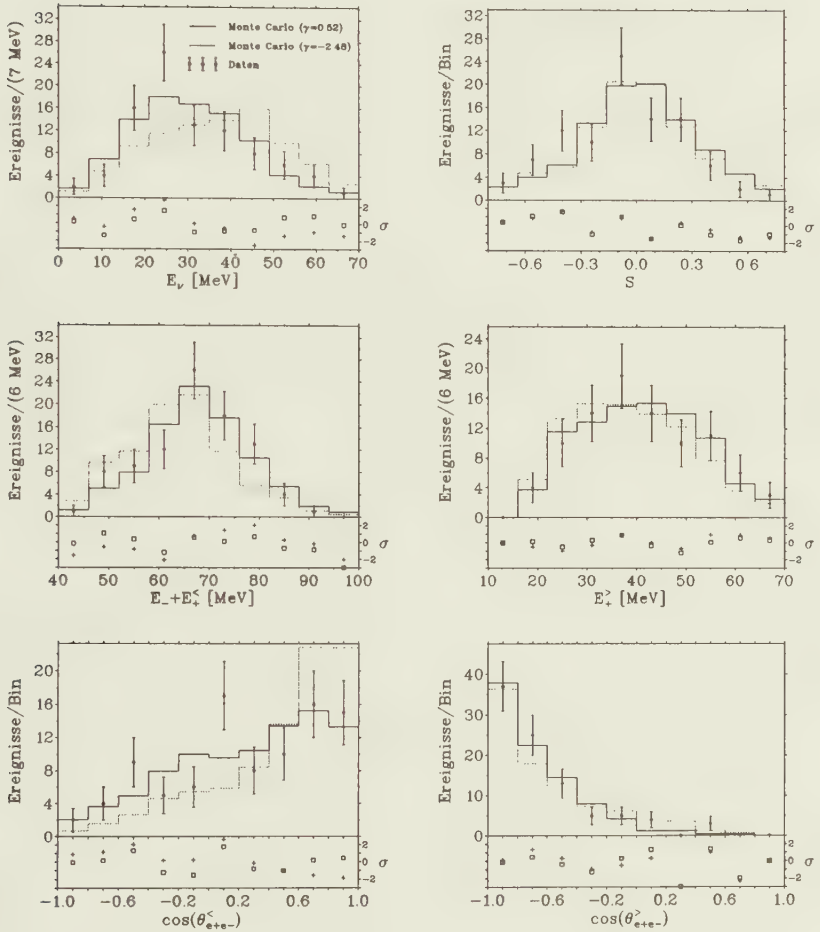


Abbildung 7.11: Verteilungen einiger kinematischer Größen für die 92 gefundenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse im eingeschränkten Phasenraum und simulierte Verteilungen für $\gamma = 0.52$ und $\gamma = -2.48$

von 14% . Für alle anderen Verteilungen ergeben sich Signifikanzwahrscheinlichkeiten von über 35%.

7.4 Der Zerfall in ein Axion

Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, wurde ein neuer Zerfallskanal des Pions postuliert, bei dem das Pion über ein ungeladenes Boson, ein sogenanntes "Axion", zerfällt, das seinerseits in ein e^+e^- -Paar zerfällt,

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a \rightarrow e^+ \nu_e e^+ e^-$$

und damit genau die $e^+e^+e^-$ Signatur des $\pi^+ \rightarrow e^+e^-\epsilon^-\nu_e$ Zerfalls hätte. Dabei bestimmt die Masse m_a und die Lebensdauer τ_a des Axions die mittlere Flugweite des Axions bis zum Zerfall in ein e^+e^- -Paar. Anders als beim direkten $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall haben die drei geladenen Teilchen im $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e a$ Zerfall daher *keinen gemeinsamen* Vertex. Ist die Lebensdauer jedoch klein genug ($\tau_a < 10^{-11}$ s) so liegt der sekundäre Vertex des Axionzerfalls nahe genug beim primären π -Zerfalls Vertex, so daß die beiden Vertices nicht getrennt aufgelöst werden können.

Solch ein Zerfall müßte sich als eine Erhöhung in der Verteilung des invarianten Massenspektrums der e^+e^- -Paare beim Wert der Axionmasse m_a bemerkbar machen. Bild 7.12 zeigt die Verteilung der kleineren und größeren invarianten Masse der beiden e^+e^- -Paare für die gemessenen Ereignisse im Bereich $128 \text{ MeV} < K < 152 \text{ MeV}$ vor der Einschränkung des Phasenraums durch die Bedingungen für den Öffnungswinkel (siehe Bild 7.6 und S.87). Der zufällige Untergrund wurde aus den nicht prompten Ereignissen bestimmt und statistisch von den Ereignissen im prompten Peak abgezogen. Der Untergrund konzentriert sich dabei auf einen Bereich der invarianten Masse von 1.02 MeV bis 10 MeV. Die gemessenen Verteilungen wurden mit Verteilungen verglichen, die sich aus einer kombinierten Simulation von $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ und $\pi^+ \rightarrow e^+\gamma\nu_e$ Ereignissen mit externer Konversion des Photons ergaben. Dabei wurden die in Abschnitt 7.3.1 bestimmten Werte der Formfaktoren und die in Abschnitt 7.2 bestimmte absolute Normierung verwendet. Dem Differenzspektrum entnimmt man, daß keine statistisch signifikante Erhöhung im Bereich der invarianten Masse von 1.02 MeV/c² bis 100 MeV/c² zu beobachten ist, die auf den Zerfall des Pions über ein Axion schließen ließe. Man kann daher nur obere Schranken für das Verzweungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e a$ Zerfalls angeben.

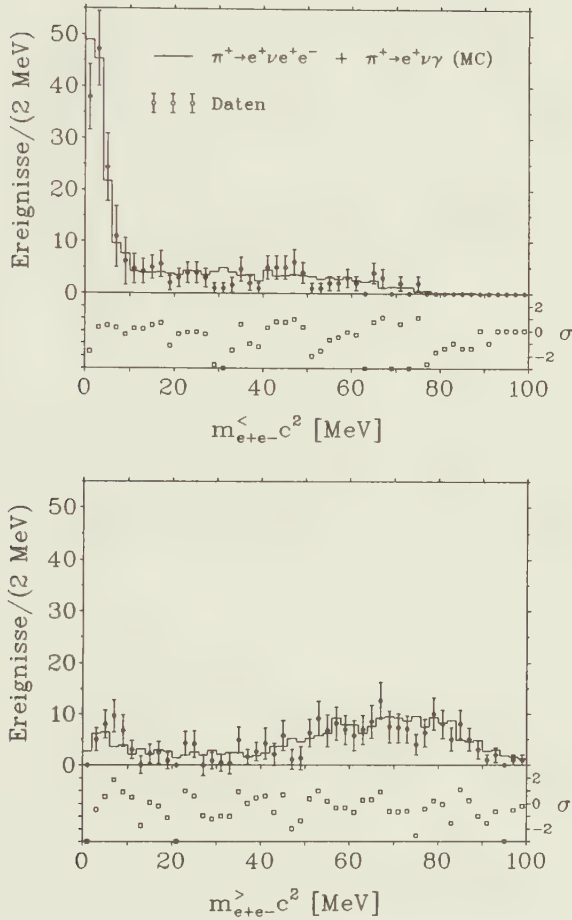


Abbildung 7.12: Verteilung der kleineren ($m_{e^+e^-}^{<}$) und der größeren ($m_{e^+e^-}^{>}$) invarianten Masse der beiden e^+e^- -Paare im $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall. Die Größe σ ist die Differenz der gemessenen und simulierten Spektren in Einheiten des erwarteten Fehlers.

Zur Berechnung dieser oberen Schranken muß die Nachweiswahrscheinlichkeit ε für $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfälle bekannt sein. Da der verwendete Vertexfit verlangt, daß die Spuren der geladenen Teilchen innerhalb der Vertexpf Auflösung einen gemeinsamen Ursprung haben, hängt diese Nachweiswahrscheinlichkeit von der mittleren Flugstrecke des Axions und damit von der Masse m_a und der Lebensdauer τ_a des Axions ab. Die Nachweiswahrscheinlichkeit $\varepsilon(m_a, \tau_a)$ wurde aus Monte Carlo Ereignissen bestimmt, wobei die beiden Parameter m_a und τ_a *unabhängig* voneinander variiert wurden. Dabei wurde ein konstantes Matrixelement für den $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfall angenommen. Die oberen Grenzen U für das Verzweigungsverhältnis ergeben sich dann aus

$$U(m_a, \tau_a) = \frac{N_{\max}(m_a)}{\varepsilon(m_a, \tau_a) \cdot N_{\pi-\text{Stopp}}} \quad (7.6)$$

Dabei ist $N_{\max}(m_a)$ die maximale Anzahl an $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfällen, die mit der beobachteten Anzahl von Ereignissen im Bereich der invarianten Masse von $m_a - \Gamma/2$ bis $m_a + \Gamma/2$ verträglich ist, wobei Γ die Auflösung (FWHM) für die invariante Masse beim Wert m_a ist. Der Wert von $N_{\max}$ ergibt sich aus der Anzahl n der im betreffenden Massenintervall beobachteten Ereignisse und der Anzahl b der erwarteten $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Ereignisse [84]:

$$N_{\max} = R^{-1}(9) \text{ für eine Signifikanzwahrscheinlichkeit von } 90\% \quad (7.7)$$

Hierbei ist die Funktion R das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, die beobachtete Anzahl der Ereignisse allein aus den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfällen erklären zu können zur Wahrscheinlichkeit, die beobachtete Anzahl der Ereignisse bei einem zusätzlichen Axionsignal s zu erhalten:

$$R(s) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} P_j(0) \cdot w_j}{\sum_{j=0}^{\infty} P_j(s) \cdot w_j} \text{ mit } P_j(s) = \frac{(j+s)!}{j! s!} \cdot e^{-(j+s)} \text{ und } w_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \cdot e^{-(b-j)^2/2\sigma_b^2} \quad (7.8)$$

Die Gewichtungsfaktoren w_j berücksichtigen dabei den Fehler σ_b von b aus dem systematischen Fehler der absoluten Normierung.

Sowohl die zufälligen Ereignisse als auch die $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Ereignisse mit extern konvertiertem Photon häufen sich in dem Teil des Phasenraums, in dem $\sum_{i=1}^3 E_i \simeq |\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c|$ gilt, das heißt, die drei geladenen Teilchen fliegen für solche Ereignisse in die annähernd gleiche Richtung.

Daher wurde als zusätzliche Bedingung verlangt:

$$\sum_{i=1}^3 E_i - \left| \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c \right| > 50 \text{ MeV} . \quad (7.9)$$

Diese Bedingung unterdrückt die $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Zerfälle um einen Faktor 2.5, die zufälligen Ereignisse um einen Faktor 6 und die $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfälle um einen Faktor 1.3. Dagegen wird die Akzeptanz für den $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfall nur um 20% für die leichtesten Axionen und um weniger als 20% für die schwereren Axionen reduziert. Bild 7.13 zeigt die Verteilungen der invarianten Massen für die Ereignisse, die die Bedingung 7.9 erfüllen. Die sich aus diesen Verteilungen mit Formel 7.6 und Formel 7.7 ergebenden oberen Grenzen für das Verzweungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfalls sind als Funktion von m_a und τ_a in Bild 7.14 dargestellt.

7.5 Diskussion der Ergebnisse

Zum erstenmal konnte der $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall beobachtet werden, wobei in einem eingeschränkten Teil des vom Detektor erfaßten Phasenraums 92 Ereignissen identifiziert werden konnten, unter denen man nur ein Untergrundereignis erwartet. Daraus ließ sich das totale Verzweungsverhältnis für den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall extrapolieren. Dabei ist jedoch zu beachten, daß diese Extrapolation von den Werten der Formfaktoren, insbesondere vom Wert des Axialvektorformfaktors R abhängt. Es ergab sich ein Wert von $BR = (3.3 \pm 0.62) \cdot 10^{-9}$ in Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Wert von $BR = (3.36 \pm 0.08) \cdot 10^{-9}$.

Die Werte der schwachen Formfaktoren F_V, F_A und R konnten aus einer Likelihood-Analyse der gemessenen kinematischen Verteilungen *unabhängig* voneinander, jedoch nur mit relativ großen Fehlern, bestimmt werden. Daraus ergab sich für den Vektorformfaktor F_V ein positives Vorzeichen. Der Betrag von F_V ist in Übereinstimmung mit dem Wert, den man aus der CVC Hypothese erwartet. Der Fehler von F_V ist jedoch zu groß, als das man von einer positiven Bestätigung der CVC Hypothese sprechen könnte. Eine Hauptmotivation für dieses $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Experiment war die Absicht, die seit 22 Jahren bestehende Zweideutigkeit für den Wert von $\gamma = F_A/F_V$ aus $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experimenten aufzulösen. Eine Diskussion der physikalischen Bedeutung der Vorzeichenfrage von γ findet sich in [44]. Dieses Ziel konnte erreicht werden: die gemesse-

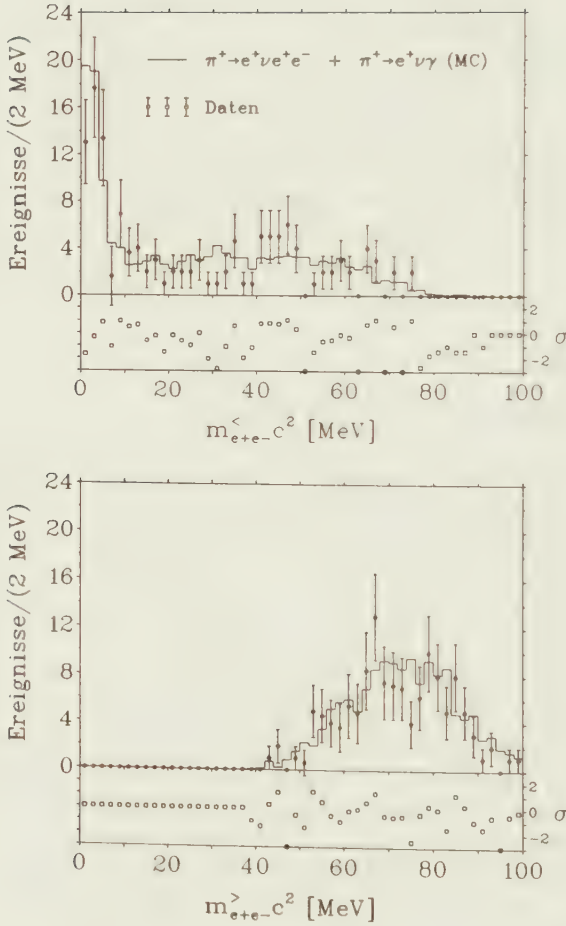


Abbildung 7.13: Verteilung der kleineren ($m_{e^+e^-}^<$) und der größeren ($m_{e^+e^-}^>$) invarianten Masse der beiden e^+e^- -Paare für Ereignisse mit $\sum_{i=1}^3 E_i - |\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i c| > 50 \text{ MeV}$.

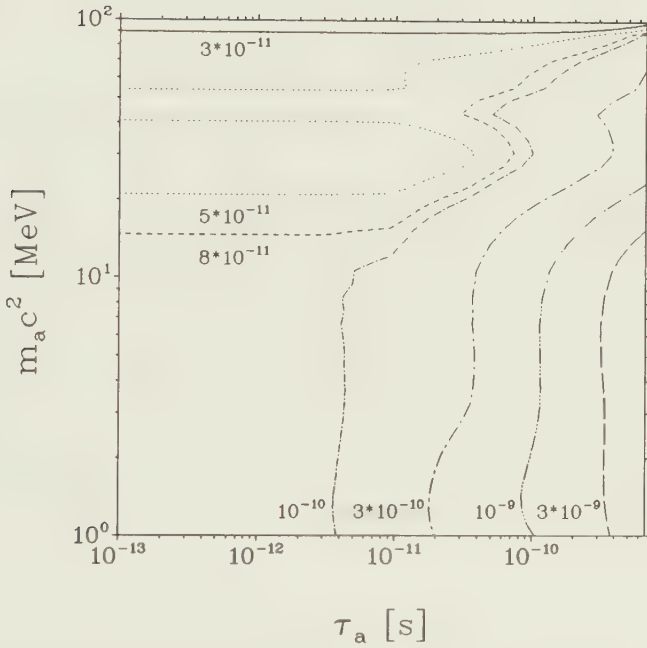


Abbildung 7.14: Obere Grenzen für das Verzweungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e a$ Zerfalls (Signifikanzwahrscheinlichkeit 90%)

nen Daten sind in guter Übereinstimmung mit dem positiven Wert von γ aus $\pi^+ \rightarrow e^+ \gamma \nu_e$ Experimenten und schließen mit Sicherheit den negativen Wert von γ aus. Zusammen mit den Resultaten des Experiments in [30] folgt, daß γ den Wert $\gamma = 0.52 \pm 0.06$ hat. Das Vorzeichen von γ betreffend ist dieses Ergebnis in Einklang mit den theoretischen Vorhersagen der verschiedenen Modelle, die alle ein positives Vorzeichen von γ fordern. Jedoch liegen die quantitativen Vorhersagen einiger Modelle so weit vom gemessenen Wert entfernt, daß sie in der bestehenden Form in Widerspruch zu den experimentellen Daten stehen. Dies gilt insbesondere für das statische Quarkmodell [33,34], das σ -Modell mit farblosen Quarks [38] und das "constituent quark" Modell [45]. Fragwürdig ist die Verträglichkeit der theoretischen Vorhersagen mit den gemessenen Werten bei dem relativistischen Quarkmodell in [36,37] und beim "non-perturbative QCD" Modell in [40]. In guter Übereinstimmung mit den Meßwerten sind dagegen die Vorhersagen der Modelle, die auf der chiralen Störungstheorie basieren [41,42,43,44] und das "soft pion" Modell.

Eine weiteres Ziel dieses Experiments war die Bestimmung des zweiten Axialvektorformfaktors R , der in $\pi^- \rightarrow e^- \gamma \nu_e$ Experimenten nicht bestimmt werden kann. Man erhielt für $\xi = R/F_1$ einen Wert $\xi = 2.4 \pm 0.3$. Setzt man die Gültigkeit der CVC und der PCAC-Hypothese voraus, die ξ mit dem elektromagnetischen Radius des Pions in Verbindung bringt, so kann diese Messung auch als unabhängige Bestimmung des Pionradius angesehen werden. So erhält man aus dem gemessenen Wert von ξ einen Radius $\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle} = (0.62 \pm 0.04) fm$. Die Tabelle 7.2 zeigt den Vergleich mit Messungen aus anderen Experimenten. Nur die πe -Streuxperimente

Tabelle 7.2: Messwerte des Pionradius aus verschiedenen Experimenten

Methode	$\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle}$ [fm]	Referenz
Inverse Elektroproduktion	0.72 ± 0.13	[87]
Elektroproduktion von π^+	0.74 ± 0.11	[88]
π -e Streuung bei 100 GeV	0.65 ± 0.11	[89]
π -e Streuung bei 250 GeV	0.62 ± 0.07	[90]
π -e Streuung bei 300 GeV	0.657 ± 0.012	[49]
$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$	0.678 ± 0.009	[91]
$\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$	0.62 ± 0.04	-

bei 300 GeV Pionimpuls und die Messungen aus $e^+ e^-$ Annihilationsreak-

tionen liefern den Radius mit einer größeren Genauigkeit, wobei jedoch betont werden muß, daß unser Wert von den gemachten Modellannahmen abhängt und die theoretische Unsicherheit dieser Annahmen nicht berücksichtigt wurde.

Neben der Untersuchung der Formfaktoren gab uns das $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiment die Gelegenheit, die Hypothese eines neuen Axionmodells zu überprüfen, das den in Schwerionen-Experimenten am GSI beobachteten monoenergetischen Positronpeak als Zerfall eines Axions in ein e^+e^- -Paar zu erklären versuchte [13,14,15,16,3]. Die Auswertung der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Daten zeigt, daß ein Axion mit der geforderten Masse von 1.7 MeV und einer Lebensdauer von unter 10^{-10} s nicht existiert bzw. zu schwach an leichte Quarks koppelt, als das es den in den GSI Experimenten beobachteten Effekt bewirken könnte. Insgesamt konnten obere Grenzen für das Verzweigungsverhältnis des $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e a$ Zerfalls in Massenbereichen des Axions von 1.02 MeV/ c^2 bis 100 MeV/ c^2 und für Lebensdauern τ_a des Axions von weniger als 10^{-10} s angegeben werden. Diese oberen Grenzen liegen im Bereich von 10^{-9} bis $3 \cdot 10^{-11}$.

Die Resultate dieses Experiments machen deutlich, welche Bedeutung die Untersuchung von seltenen Zerfällen sowohl für die Überprüfung bestehender Theorien als auch für den Test von Hypothesen, die neue physikalische Effekte postulieren, haben kann. Der $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfall ist daher ein Beispiel dafür, wie die Untersuchung neuer Zerfallsarten von Teilchen neue und zum Teil komplementäre Informationen zu den Resultaten bestehender Experimente beisteuern kann.

Anhänge

Appendix A

Der Spurfit und der Vertexfit

A.1 Der Spurfit

In diesem Anhang werden die Formeln zur Durchführung des Spurfits unter Berücksichtigung der Kammerauflösungen, der Vielfachstreuung und des Energieverlustes zusammengefaßt. Die Formeln gelten allgemein für konzentrisch angeordnete Zylindergeometrien in einem homogenen Magnetfeld. Sie basieren auf den Ausführungen in [58,59].

Die Lösung der Lorentzgleichung in einem homogenen Magnetfeld entlang der z-Achse ist eine Helix, die durch fünf Spurparameter $\vec{p}$ beschrieben werden kann. Es wurde die folgende Parametrisierung gewählt:

$$\vec{p} \equiv \begin{pmatrix} R \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ m \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Helix:

$$x(\phi) = x_0 + R \cdot \cos(\phi) \quad (\text{A.2})$$

$$y(\phi) = y_0 + R \cdot \sin(\phi) \quad (\text{A.3})$$

$$z(\phi) = z_0 + s \cdot R \cdot \phi \cdot m \quad (\text{A.4})$$

Die ersten drei Parameter beschreiben also den Kreis in der $r\phi$ Projektion durch die Koordinaten des Kreismittelpunkts und den Radius. Der Radius ergibt sich aus der Stärke des Magnetfeldes B und dem Transversalimpuls p_t des Teilchens:

$$R = \frac{p_t}{0.299 \cdot B} \text{ mit } p_t \text{ in MeV/c, B in kG, R in cm} \quad (\text{A.5})$$

Die Variable s gibt an, ob es sich um ein positiv ($s = -1$) oder ein negativ geladenes Teilchen ($s = +1$) handelt, der Azimuthwinkel ϕ ist der "innere Parameter" der Helix. Die Steigung m der Helix kann auch durch den Neigungswinkel λ ausgedrückt werden: $m = \tan(\lambda)$. Der Neigungswinkel legt auch das Verhältnis des Transversalimpulses p_t zum Gesamtimpuls p fest: $p_t = p \cos(\lambda)$.

Es seien nun N Meßpunkte c_i entlang der Spur gegeben, wobei es sich um Azimuthwinkel φ oder um z Koordinaten handeln kann, definiert bei einem Referenzradius r_i (=Radius des Anodenzyinders). Statt der Koordinate φ wird üblicherweise die Größe $r_i \varphi$ verwendet. In einem Spurmodell werden jetzt Vorhersagen $f_i(\vec{p})$ für die Koordinaten c_i als Funktion der Spurparameter $\vec{p}$ gemacht. Die Modellkoordinaten f_i ergeben sich für die angenommene Geometrie aus dem Schnittpunkt der Helix mit dem Referenzzyylinder vom Radius r_i .

$$(r\varphi)_i = r_i \operatorname{atan}\left(\frac{y_s}{x_s}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$z_i = p_4 + s p_1 p_5 \operatorname{atan}\left(\frac{y_s - p_3}{x_s - p_2}\right)$$

mit der im folgenden benützten abkürzenden Schreibweise:

$$A \equiv p_2^2 + p_3^2 \quad (\text{A.7})$$

$$B \equiv \frac{p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 + r_i^2}{2}$$

$$C \equiv \sqrt{A \cdot r_i^2 - B^2}$$

$$u \equiv B p_3 - s C p_2$$

$$v \equiv B p_2 + s C p_3$$

$$r \equiv u/A - p_3$$

$$t \equiv v/A - p_2$$

Jede der Koordinaten c_i ist entsprechend der Ortsauflösung der Kamern mit einem Fehler σ_i behaftet. Gesucht sind die Werte von $\vec{p}$, die die Größe

$$Q^2(\vec{p}) = (\vec{c} - \vec{f}(\vec{p}))^* W (\vec{c} - \vec{f}(\vec{p})) \quad (\text{A.8})$$

minimieren. Solange die Vielfachstreuung nicht mitberücksichtigt wird, ist W eine diagonale Gewichtsmatrix mit den Elementen $W_{ij} = \delta_{ij}/\sigma_i^2$, die Meßfehler sind also voneinander unabhängig. Für den Spezialfall, daß die

Matrix W nicht von den Spurparametern $\vec{p}$ abhängt und das Spurmodell von den Spurparametern linear abhängt:

$$\vec{f}(\vec{p}) = D \cdot \vec{p} + \vec{f}_0 \quad (\text{A.9})$$

läßt sich das Minimierungsproblem explizit lösen [58]:

$$\vec{p}_f = (D^* \cdot W \cdot D)^{-1} \cdot D^* \cdot W \cdot (\vec{c} - \vec{f}_0) \quad (\text{A.10})$$

Die Kovarianzmatrix V der Spurparameter ergibt sich mit Formel A.10 aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$V = (D^* \cdot W \cdot D)^{-1} \quad (\text{A.11})$$

Da es sich bei V um eine positiv definite Matrix handelt, kann die Matrixinversion mit geringem Rechenaufwand durchgeführt werden.

Auch für den Fall, daß das Spurmodell wie bei der Helix nicht linear von den Spurparametern abhängt, können die obigen Formeln verwendet werden. Dazu gibt man sich einen Startwert $\vec{p}_0$ vor und macht anschließend eine Taylorentwicklung des Spurmodells um diesen Startwert bis zu Termen linear in $\vec{p}$.

$$\vec{f}(\vec{p}) \simeq \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{f}(\vec{p})}{\partial \vec{p}} \right|_{\vec{p}=\vec{p}_0}}_{D_0} \cdot \vec{p} + \vec{f}_0 \quad (\text{A.12})$$

Der Startwert kann zum Beispiel aus dem in der $r\phi z$ Analysestufe durchgeführten Spurfit [56,92] gewonnen werden. Durch iterative Anwendung der Formel A.10 mit $D = D_0$ erhält man nun auch im nichtlinearen Fall das Minimum von Q^2 . Tatsächlich genügte in den meisten Fällen ein Iterationsschritt, um mit der geforderten Genauigkeit (die Differenz $\vec{p}_f - \vec{p}_0$ soll klein gegen den Fehler von $\vec{p}$ sein) das Minimum von Q^2 zu bestimmen.

Die Matrix D_0 der Ableitungen des Spurmodells $\vec{f}$ nach den Spurparametern $\vec{p}$ lautet für das Spurmodell in Formel A.6 mit den in A.7 definierten Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial p_j} &= \frac{r}{u^2 + v^2} \cdot \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial p_j} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial p_j} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial p_j} &= \delta_{4j} + s \cdot \text{atan}(r/t)(p_5 \delta_{1j} + p_1 \delta_{5j}) + \frac{sp_1 p_5}{r^2 + t^2} \cdot \left(t \cdot \frac{\partial r}{\partial p_j} - r \cdot \frac{\partial t}{\partial p_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial p_j} &= \begin{pmatrix} -p_1 p_3 - p_1 p_2 s B / C \\ -s C + p_2 p_3 - s p_2^2 (r^2 - B) / C \\ B + p_3^2 - s p_2 p_3 (r^2 - B) / C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14}) \\
 \frac{\partial v}{\partial p_j} &= \frac{\partial u}{\partial p_j} (p_2 \rightarrow -p_3 ; p_3 \rightarrow p_2) \\
 \frac{\partial r}{\partial p_j} &= (1/A)^2 \cdot \begin{pmatrix} A \cdot \frac{\partial u}{\partial p_1} \\ A \cdot \frac{\partial u}{\partial p_2} - 2 p_2 u \\ -A^2 + A \cdot \frac{\partial u}{\partial p_3} - 2 p_3 u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial t}{\partial p_j} &= \frac{\partial r}{\partial p_j} (p_2 \rightarrow -p_3 ; p_3 \rightarrow p_2)
 \end{aligned}$$

Die Größe Q^2 im gefundenen Minimum $Q_{\min}^2 = Q^2(\vec{p}_f)$ muß bei gaußverteilten Meßfehlern eine χ^2 Verteilung $P_{N_{DF}}(\chi^2)$ mit $N_{DF} = N - 5$ Freiheitsgraden liefern (N Meßpunkte - 5 Fitparameter). Um diese Bedingung überprüfen zu können, berechnet man aus $Q_{\min}^2$ die Größe

$$PROB(Q_{\min}^2, N_{DF}) \equiv \int_{Q_{\min}^2}^{\infty} P_{N_{DF}}(\chi^2) d\chi^2 \quad (\text{A.15})$$

(Wahrscheinlichkeitsfunktion). Falls $Q_{\min}^2$ der geforderten Verteilung $P_{N_{DF}}(\chi^2)$ gehorcht, so ist die Größe $PROB(Q_{\min}^2, N_{DF})$ im Intervall $[0, 1]$ flach verteilt [61].

Der Energieverlust in den Kammern kann durch eine Änderung des Spurmodells berücksichtigt werden. Dazu wird die Spur stückweise aus Helixbögen zusammengesetzt, wobei jeweils an den Übergangsstücken, an denen das Teilchen Energie verliert (Kammerwände, Targetmaterial o.ä.) aus der durchquerten Materialmenge der mittlere Energieverlust (Ionisations- und Bremsstrahlungsverluste) berechnet wird und die Spurparameter entsprechend korrigiert werden. Solange der relative Energieverlust klein ist ($< 5\%$), hat diese Änderung des Spurmodells keinen bemerkbaren Einfluß auf die Berechnung der Matrix D_0 .

Die Vielfachstreuung kann durch die "Parametrisierungsmethode" mit in den Spurfit einbezogen werden. Hierbei wird das Spurmodell so erweitert, daß an jeder Streuebene 2 Streuwinkel definiert werden. Das

Spurmodell hängt dann von den eigentlichen Spurparametern $\vec{p}$ und den Streuwinkeln Θ_i ab: $f(\vec{p}, \vec{\Theta})$. Entsprechend muß nun die Größe

$$Q_{ms}^2 = (\vec{c} - \vec{f}(\vec{p}, \vec{\Theta}))^* \cdot W \cdot (\vec{c} - \vec{f}(\vec{p}, \vec{\Theta})) + \vec{\Theta}^* \cdot W^{ms} \cdot \vec{\Theta} \quad (\text{A.16})$$

minimiert werden. Die Matrix W^{ms} ist dabei eine $2M \cdot 2M$ (bei M Streuebenen) große diagonale Matrix mit den Elementen $W_{ij}^{ms} = \delta_{ij} \cdot 1/v(\Theta_i)$. Die Varianzen der Streuwinkel $v(\Theta_i)$ ergeben sich aus der durchquerten Materialmenge [85,86]:

$$v(\Theta) = \sigma^2(\Theta) = \left[\frac{14.1}{\rho\beta} \cdot \sqrt{L/L_R} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} \cdot \log_{10}(L/L_R) \right) \right]^2 \quad (\text{A.17})$$

L ist die durchquerte Materiallänge, L_R die Strahlungslänge des Materials, p der Impuls des Teilchens in MeV/c und β die Geschwindigkeit des Teilchens in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit. Man kann zeigen, daß das Minimierungsproblem in Formel A.16 bei linearer Näherung äquivalent zur Gleichung A.8 ist, wenn man die Matrix W durch eine *nichtdiagonale* Matrix $\tilde{W}$ ersetzt:

$$\tilde{W} = [W^{-1} + T \cdot (W^{ms})^{-1} \cdot T^*]^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Die Matrix T ist die Matrix der Ableitungen des Spurmodells nach den Streuwinkeln:

$$T_{ij} = \frac{\partial f_i(\vec{p}, \vec{\Theta} = \vec{0})}{\partial \Theta_j} \quad (\text{A.19})$$

Diese Matrix kann aus dem expliziten Spurmodell $\vec{f}(\vec{p}, \vec{\Theta})$ hergeleitet werden. Die Spurparameter $\vec{p}_f$ und ihre Kovarianzmatrix $\tilde{V}$ erhält man jetzt wie in Formel A.10 und A.11, wobei die Matrix W durch $\tilde{W}$ zu ersetzen ist.

Zur Überprüfung des Spurfits können die "Pullgrößen" r_i berechnet werden:

$$r_i = (f_i(\vec{p}_f) - t_i)/\sigma_i \text{ mit } \sigma_i = \sqrt{(\tilde{W}^{-1})_{ii}} \quad (\text{A.20})$$

Diese Größen müssen "normalverteilt" sein (Gaußverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1). Die Koordinaten t_i sind dabei die wahren Koordinaten der Durchstoßpunkte der Spur und können nur für simulierte Ereignisse bestimmt werden. Um auch für die gemessenen Daten eine Kontrollmöglichkeit zu haben, kann man stattdessen die "reduzierten Pullgrößen" $\tilde{r}_i$ berechnen, die ebenfalls normalverteilt sein müssen:

$$\tilde{r}_i = (f_i(\vec{p}_f) - c_i)/\sigma_i \text{ mit } \sigma_i = \sqrt{(\tilde{W}^{-1} - D \cdot \tilde{V} \cdot D^*)_{ii}} \quad (\text{A.21})$$

Gegenüber den Pullgrößen r_i sind die wahren Koordinaten t_i durch die gemessenen Koordinaten c_i ersetzt, und der erwartete Fehler σ_i entsprechend reduziert (siehe [58]).

A.2 Der Vertexfit

Der Spurfit berechnet die Spurparameter am ersten gemessenen Punkt der jeweiligen Spur. Um den gemeinsamen Ursprungsort (Vertex) von n Spuren zu ermitteln, muß man die Spuren bis in den Targetbereich zurückverfolgen. Dazu gibt man sich einen Punkt $\vec{v}$ und die Impulse der n Teilchen $\vec{q}_i$ an diesem Punkt vor und versucht, die damit definierten Spurparameter $\vec{k}_i$ an die gefitteten Spurparameter $\vec{p}_i$ (die beim ersten Meßpunkt gegeben sind) anzupassen. Das Maß für die Güte der Anpassung wird durch folgende Größe gegeben:

$$\chi_V^2(\vec{v}, \vec{q}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i - \vec{k}_i(\vec{v}, \vec{q}_i))^* \cdot V_i^{-1} \cdot (\vec{p}_i - \vec{k}_i(\vec{v}, \vec{q}_i)) \quad (\text{A.22})$$

Der Vertex $\vec{v}_f$ und die Impulse der Teilchen am Vertex $\vec{q}_f$ sind dann die Werte, die die Größe χ_V^2 minimieren. Die Matrizen V_i sind die Kovarianzmatrizen der Spuren aus dem Spurfit. Die Minimierung wurde mit Standardroutinen aus der CERN Programmbibliothek [93] und der NAG Programmbibliothek [94] durchgeführt. Zur Kontrolle wurde ein zweites Verfahren zur Vertexbestimmung, wie es in [95] und [60] beschrieben ist, angewendet. Die beiden Methoden lieferten übereinstimmende Resultate.

Genau wie beim Spurfit muß die Größe $\chi_V^2(\vec{v}_f, \vec{q}_f)$ eine χ^2 Verteilung mit $N_{DF} = 2n - 3$ Freiheitsgraden ($5n$ Residuen - $(3n + 3)$ Fitparameter) sein. Diese Bedingung wird wieder am einfachsten mit der in Formel A.15 definierten Wahrscheinlichkeitsfunktion getestet.

Um die Streuung der Spuren im Target mitzuberücksichtigen, müssen die Kovarianzmatrizen der Spuren gemäß der durchquerten Materialmenge angepaßt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt der Vertexfit ohne Berücksichtigung der Streuung durchgeführt, womit man für jede Spur den Ort der Streuung im Target und die durchquerte Materialmenge abschätzen kann. In einem lokalen Koordinatensystem, das durch die Spurrichtung am Durchstoßpunkt und zwei dazu senkrechte Achsen definiert wird, läßt sich der Einfluß der Streuung durch die Fehlermatrix (=Kovarianzmatrix)

$$\text{cov}(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} \cdot \sigma_{streu}^2 \text{ mit } \sigma_{streu}^2 \text{ aus Formel A.17} \quad (\text{A.23})$$

beschreiben, wobei die Winkel $\alpha_{1,2}$ die Streuwinkel in den Ebenen sind, die durch die Spurrichtung und einen der dazu senkrechten Achsen aufgespannt werden. Diese Matrix muß auf die Kovarianzmatrix der Spurparameter transformiert werden:

$$V_{ij}^{st} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_l} \cdot \text{cov}(\alpha_k, \alpha_l) \quad (\text{A.24})$$

Die Matrix der Ableitungen der Spurparameter nach den Streuwinkeln läßt sich explizit angeben:

$$\left. \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{\alpha}} \right|_{\vec{\alpha}=\vec{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1 \cdot s \cdot c \cdot \sin \phi_0 \\ 0 & -p_1 \cdot s \cdot c \cdot \cos \phi_0 \\ c^2 \cdot p_1 \cdot \phi_0 & -p_1 \cdot p_5 \cdot c \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

mit $c = \sqrt{1 + p_5^2}$ und ϕ_0 der azimuthale Winkel der Helix am Streupunkt. Die geänderte Kovarianzmatrix $\hat{V}$ erhält man schließlich durch Addition von V^{st} zur ursprünglichen Kovarianzmatrix V :

$$\hat{V} = V + V^{st} \quad (\text{A.26})$$

Für das aktive SINDRUM Target können beim Vertexfit noch zusätzliche Bedingungen verlangt werden. So kann man verlangen, daß der Vertex auf einem der angesprochenen Targetzähler (Dreiecke) liegen muß. Diese Bedingung kann mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren [61] befriedigt werden, oder direkt durch eine Reduzierung der Fitparameter (statt drei Vertexkoordinaten $\vec{v}$ nur noch zwei freie Parameter, z.B. φ und z Koordinate des Vertex). Dabei muß während der Minimierung immer sichergestellt sein, daß der Vertex noch auf dem Dreieck i , definiert durch die Intervalle $[\varphi_{min}^i, \varphi_{max}^i]$ und $[z_{min}, z_{max}]$, liegt. Die Größe N_{DF} erhöht sich dabei um 1 oder, falls der Vertex am Rand eines Dreiecks liegt, um 2.

Auch ein "kinematischer" Vertexfit läßt sich auf diese Weise durchführen [62]. Dabei werden die durch die Kinematik auferlegten Nebenbedingungen beim Vertexfit mitberücksichtigt. Ein Beispiel für eine solche Bedingung ist in Abschnitt 5.3.2 für den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall genannt. Ein weiteres Beispiel ist die Bhabhastreuung: der Viererimpuls des Elektrons ($E_1, \vec{p}_1$) und des Positrons ($E_2, \vec{p}_2$) müssen am Ort der Bhabhastreuung die Bedingung

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = E_1 E_2 - (E_1 + E_2) \cdot m_e + m_e^2$$

erfüllen (m_e ist die Masse des Elektrons). Auch diese Bedingungen können durch eine geeignete Wahl der Fitparameter direkt berücksichtigt werden, ohne den Umweg über die Lagrange'schen Multiplikatoren gehen zu müssen.

Bei den hier beschriebenen Verfahren werden der Spurfit und der Vertexfit getrennt voneinander durchgeführt. Im Prinzip müßte aber der Vertex zusammen mit den Spurparametern in *einem gemeinsamen Fit* berechnet werden. Man kann aber zeigen, daß im Falle von gaußverteilten Meßfehlern und bei annähernd linearer Abhängigkeit der Residuen von den Fitparametern (Bedingungen, die beim SINDRUM Detektor gut erfüllt sind) durch die Aufteilung in Spurfit und Vertexfit keine Information verloren geht.

Appendix B

Der Signifikanztest

Ausgangspunkt eines nichtparametrischen Signifikanztests (die Parameter sind durch die Maximum-Likelihood-Methode festgelegt worden) ist die "Nullhypothese" H_0 , daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\vec{x})$, die der gemessenen Stichprobe $\{\vec{x}_i, i = 1 \dots N\}$ zugrunde liegt, durch die Funktion $f(\vec{x})$ gegeben ist:

$$H_0 : p(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Man wählt eine als "Test-Statistik" bezeichnete Funktion Y der Stichprobe $\{\vec{x}_i\}$, die als Abstandsmaß der Stichprobenverteilung von der Verteilung $f(\vec{x})$ aufgefaßt werden kann. Aus der explizit gegebenen Funktion $f(\vec{x})$ kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_N^{(0)}(Y)$ von Y für eine Stichprobe mit N Elementen unter der Annahme von H_0 berechnen. Beim Signifikanztest wird die Wahrscheinlichkeit α berechnet, daß die Test-Statistik einen Wert überhalb dem Wert T der gemessenen Stichprobe liefert:

$$\alpha(T) = \int_T^\infty p_N^{(0)}(Y) dY$$

Diese Größe bezeichnet man als Signifikanzwahrscheinlichkeit. Unterschreitet α einen durch Konvention festgelegte kritische Wahrscheinlichkeit (Signifikanzschranke), so gilt die Nullhypothese als widerlegt [73,96,97].

Das Abstandsmaß Y kann im Falle von r -dimensionalen Verteilungen (Dimension des Vektors $\vec{x}$) aus dem Vergleich zweier Punktmengen in diesem r -dimensionalen Raum bestimmt werden. Dabei repräsentiert die eine Punktmenge die gemessene Stichprobe, die andere Punktmenge wird unter der Nullhypothese als eine Monte Carlo Stichprobe mit M Elementen erzeugt. Nun wird geschaut, ob beide Punktmengen aus der gleichen Grundgesamtheit stammen können. Dazu faßt man beide Punktmengen

zu einer Punktmenge mit $N + M$ Elementen zusammen und bestimmt für jeden Punkt P der Gesamtmenge die Anzahl k_n der Punkte unter den k nächsten Nachbarn von P , die aus der *gemessenen* Stichprobe stammen (oder die Anzahl $k_m = k - k_n$ der Anzahl Punkte aus der Monte Carlo Stichprobe). Die Häufigkeitsverteilung $H(k_n)$ der Größe k_n kann dann mit der Häufigkeitsverteilung $H^0(k_n)$ unter der Nullhypothese verglichen werden. Es kann gezeigt werden [73], daß $H^0(k_n)$ in guter Näherung eine Binomialverteilung ist:

$$H^0(k_n) = \frac{k!}{k_n!(k - k_n)!} \cdot \left(\frac{N}{N + M}\right)^{k_n} \cdot \left(\frac{M}{N + M}\right)^{k - k_n}$$

Dadurch ist das Problem des Vergleichs von r -dimensionalen Verteilungen auf den Vergleich der eindimensionalen Verteilungen $H(k_n)$ und $H^0(k_n)$ zurückgeführt, für die eine Reihe von Teststatistiken zur Verfügung stehen (χ^2 , Kolmogorov, Smirnov-Cramer-von-Mises). Die Signifikanzwahrscheinlichkeit kann aber nicht aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Teststatistiken abgeleitet werden, da die Werte von k_n für benachbarte Punkte stark korreliert sind (die Bereiche nächster Nachbarn überlappen stark), was zu einer erheblichen Abweichung von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik führt. Daher wird bei der Methode des Vergleichs zweier Punktmengen die Signifikanzwahrscheinlichkeit direkt aus den gemessenen Daten durch ein Permutationsverfahren bestimmt. Hierbei werden die beiden Punktmengen wieder zu einer Punktmenge zusammengefaßt. Anschließend werden alle Punkte den beiden Klassen in zufälliger Weise neu zugeteilt, wobei das ursprüngliche Gewichtsverhältnis N/M erhalten bleibt. Der obige Vergleichsalgorithmus wird dann auf diese neu definierten Punktmengen angewendet, so daß man einen neuen Wert der Teststatistik erhält. Eine wiederholte Anwendung dieser Permutationen liefert die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistik. Der Bruchteil der Werte, die größer sind als der Wert der Teststatistik im unpermutierten Zustand, ist dann die Signifikanzwahrscheinlichkeit.

Dieses Verfahren wurde auf die Daten des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiments angewendet. Der Raum der Punktmengen ist hier der Phasenraum des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Zerfalls, der Vektor $\vec{x}$ setzt sich dabei aus $r = 5$ kinematischen Größen zusammen, wobei folgende Wahl der Koordinaten getroffen

wurde:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} E_-/m_\pi \\ E_</m_\pi \\ E_>/m_\pi \\ \theta_{e^+e^-}^</\pi \\ \theta_{e^+e^-}^>/\pi \end{pmatrix}$$

E_- , $E_<$, $E_>$ sind die Energien der geladenen Teilchen, wobei der Index "<" (">") das Positron bezeichnet, das mit dem Elektron zusammen die kleinere (größere) invariante Masse bildet. Die θ -Größen sind die Öffnungswinkel zwischen den beiden Positronen und dem Elektron. Als Abstand zweier Punkte in diesem Raum wurde der euklidische Abstand gewählt. Als Teststatistik wurde der Smirnov-Cramer-von-Mises Test verwendet:

$$Y = \sum_{j=0}^k [S(j) - S^0(j)]^2 \cdot H^0(j) \text{ mit } S(j) = \sum_{i=1}^j H(i) \text{ und } S^0(j) = \sum_{i=1}^j H^0(i)$$

Die $N = 92$ gemessenen $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Ereignisse wurden mit $M = 400$ Monte Carlo Ereignissen verglichen, und zur Bestimmung der Signifikanzwahrscheinlichkeit wurden jeweils 1000 Permutationen durchgeführt. Tabelle B.1 zeigt, daß die sich ergebenden Werte für α von der Anzahl k

Tabelle B.1: Signifikanzwerte als Funktion der Anzahl k nächster Nachbarn

k	6	8	10	12	14	16
α	0.54	0.68	0.70	0.73	0.61	0.83

der nächsten Nachbarn abhängen, jedoch immer über 0.54 liegen.

Appendix C

Das $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Matrixelement

Dieser Anhang beinhaltet das FORTRAN Programm von Alfred Kersch, mit dem das Matrixelement für den $\pi^+ \rightarrow e^+ e^+ e^- \nu_e$ Zerfall als Funktion der Formfaktoren berechnet wurde. Das Programm beruht auf den in [22] beschriebenen Berechnungsverfahren.

```
FUNCTION PI3ENU(P,FIN,AIN,RIN)
C*****
C Berechnung des Matrixelements fuer den PI->3ENU Zerfall
C Eingabeparameter: P      : Viererimpulse der Zerfallsprodukte
C                   FIN    : Vektorformfaktor
C                   AIN    : 1. Axialvektorformfaktor
C                   RIN    : 2. Axialvektorformfaktor
C Ausgabe:          PI3ENU : Das PI->3ENU Matrixelement
C*****

INTEGER SP,SPP,SPM,SK2
REAL*4 FIN,AIN,RIN
REAL*4 QG,QH,PPM,PPP,PPPM,PG,PH,GG,HH,HAMPL,EPS(2,2),P(5,18)
REAL*4 M,ME,MPROTON,MMU,GF,PI,F,A,FPI,R,ALPHA,FACTOR,GAMMA
REAL*4 NENN1,NENN2,NENN1S,NENN2S,NORM,GEWFAC(10)
COMPLEX*8 I,AMPA,AMPAS,AMPF,AMPFS,AMPR,AMPRS,AMPB,AMPBS,ANS1
COMPLEX*8 FPSU(2,2),FPSO(2,2),CPCO(2,2),CPCU(2,2)
COMPLEX*8 FPPSU(2,2),FPPSO(2,2),CPPCO(2,2),CPPCU(2,2)
COMPLEX*8 FPMSU(2,2),FPMSO(2,2),CPMCO(2,2),CPMCU(2,2)
COMPLEX*8 FK2SU(2,2),FK2SO(2,2),CK2CO(2,2),CK2CU(2,2)
COMPLEX*8 Q(2,2),QD(2,2),G(2,2),GD(2,2),H(2,2),HD(2,2)

I = CMPLX(0.0,1.0)
M = 139.5673
ME= SQRT(ABS(P(4,1)*P(4,1)-P(1,1)*P(1,1)-P(2,1)*P(2,1)-
.          P(3,1)*P(3,1)))
FPI = 0.944*M
PI= 3.141592653589793238
```


C EINIGE KOVARIANTEN AUS DEN 4-VEKTOREN

C

```

QG = M*P(4,3)+M*P(4,2)           ! NUR IM RUHESYSTEM DES PIONS
QH = M*P(4,1)+M*P(4,2)
PPM =P(4,1)*P(4,2)-P(1,1)*P(1,2)-P(2,1)*P(2,2)-P(3,1)*P(3,2)
PPP =P(4,1)*P(4,3)-P(1,1)*P(1,3)-P(2,1)*P(2,3)-P(3,1)*P(3,3)
PPPM =P(4,3)*P(4,2)-P(1,3)*P(1,2)-P(2,3)*P(2,2)-P(3,3)*P(3,2)
PG =PPP+PPM
PPH =ME**2+PPPM
GG =2.0*(ME**2+PPPM)
HH =2.0*(ME**2+PPM)
NENN1 = 1./(2.*PG+GG)
NENN1S= NENN1
NENN2=1./(2.*QG-GG)
NENN2S=1./(2.*QH-HH)

```

C

C 2-SPINOREN DES POSITRONS1

C

```

NORM=1.0/SQRT( 2.0*( P(4,1)+ME ))
FPSU(1,1)=NORM*( -P(1,1) + I*P(2,1) )
FPSU(2,1)=NORM*(-ME - P(4,1) + P(3,1))
FPSU(1,2)=NORM*(-ME - P(4,1) - P(3,1))
FPSU(2,2)=NORM*( -P(1,1) - I*P(2,1) )
CPCO(1,1)=NORM*( P(1,1) - I*P(2,1) )
CPCO(2,1)=NORM*(-ME - P(4,1) - P(3,1))
CPCO(1,2)=NORM*(-ME - P(4,1) + P(3,1))
CPCO(2,2)=NORM*( P(1,1) + I*P(2,1) )

```

C

C 2-SPINOREN DES POSITRONS2

C

```

NORM=1.0/SQRT( 2.0*( P(4,3)+ME ))
FPPSU(1,1)=NORM*( -P(1,3) + I*P(2,3) )
FPPSU(2,1)=NORM*(-ME - P(4,3) + P(3,3))
FPPSU(1,2)=NORM*(-ME - P(4,3) - P(3,3))
FPPSU(2,2)=NORM*( -P(1,3) - I*P(2,3) )
CPPCO(1,1)=NORM*( P(1,3) - I*P(2,3) )
CPPCO(2,1)=NORM*(-ME - P(4,3) - P(3,3))
CPPCO(1,2)=NORM*(-ME - P(4,3) + P(3,3))
CPPCO(2,2)=NORM*( P(1,3) + I*P(2,3) )

```

C

C 2-SPINOREN DES ELEKTRONS

C

```

NORM=1.0/SQRT( 2.0*( P(4,2)+ME ))
FPMSU(1,1)=NORM*( ME + P(4,2) + P(3,2))
FPMSU(2,1)=NORM*( P(1,2) + I*P(2,2) )
FPMSU(1,2)=NORM*( P(1,2) - I*P(2,2) )
FPMSU(2,2)=NORM*( ME + P(4,2) - P(3,2))

```

```

CPMCO(1,1)=NORM*( ME + P(4,2) - P(3,2))
CPMCO(2,1)=NORM*( -P(1,2) - I*P(2,2) )
CPMCO(1,2)=NORM*( -P(1,2) + I*P(2,2) )
CPMCO(2,2)=NORM*( ME + P(4,2) + P(3,2))

```

C
C
C

2-SPINOREN DES ELEKTRONNEUTRINOS

IF(P(4,4).LE.0.)THEN

NORM=0.

ELSE

NORM=1.0/SQRT(2.0*P(4,4))

ENDIF

```

FK2SU(1,1)=NORM*( P(4,4) + P(3,4) )
FK2SU(2,1)=NORM*( P(1,4) + I*P(2,4) )
FK2SU(1,2)=NORM*( P(1,4) - I*P(2,4) )
FK2SU(2,2)=NORM*( P(4,4) - P(3,4) )
CK2CO(1,1)=NORM*( P(4,4) - P(3,4) )
CK2CO(2,1)=NORM*( -P(1,4) - I*P(2,4) )
CK2CO(1,2)=NORM*( -P(1,4) + I*P(2,4) )
CK2CO(2,2)=NORM*( P(4,4) + P(3,4) )

```

C
C
C

HEBEN UND SENKEN DER SPINORINDIZES

EPS(1,1)=0.0

EPS(1,2)=1.0

EPS(2,1)=-1.0

EPS(2,2)=0.0

DO 29 K=1,2

DO 19 II=1,2

FPSO(II,K)=0.0

CPCU(II,K)=0.0

FPPSO(II,K)=0.0

CPPCU(II,K)=0.0

FPMSO(II,K)=0.0

CPMCU(II,K)=0.0

FK2SO(II,K)=0.0

CK2CU(II,K)=0.0

19 CONTINUE

29 CONTINUE

DO 30 K=1,2

DO 20 II=1,2

DO 10 J=1,2

FPSO(II,K)=FPSO(II,K)+EPS(II,J)*FPSU(J,K)

CPCU(II,K)=CPCU(II,K)+EPS(II,J)*CPCO(J,K)

FPPSO(II,K)=FPPSO(II,K)+EPS(II,J)*FPPSU(J,K)

CPPCU(II,K)=CPPCU(II,K)+EPS(II,J)*CPPCO(J,K)

FPMSO(II,K)=FPMSO(II,K)+EPS(II,J)*FPMSU(J,K)


```

C  C
C                                     C
C      BERECHNUNG DER AMPLITUDE
C  C
C  CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC C
C
C      UEBER DIE SPINEINSTELLUNGEN VON P,PP,PM,QM WIRD SUMMIERT
C
C      DO INDEX=1,10
GEWFAC(INDEX)=0.
      ENDDO
      HAMPL = 0.0
      DO 4000 SK2=1,2
        DO 3000 SP=1,2
          DO 2000 SPP=1,2
            DO 1000 SPM=1,2

C
C      DIESE SCHLEIFEN FUEHREN DIE MATRIZENMULTIPLIKATION AUS
C
      AMPA = 0.0
      AMPF = 0.0
      AMPR = 0.0
      AMPB = 0.0
      AMPAS = 0.0
      AMPFS = 0.0
      AMPRS = 0.0
      AMPBS = 0.0

C
      ANS1 = 1*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,2)*CPCO(2,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,2)*CPCO(2,SP))*
. (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPPSU(2,SPP))
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,2)*CPCO(2,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,2)*CPCO(2,SP))*
. (CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPPCO(2,SPP)) )
      AMPA = AMPA + ANS1 + 1*(
. -4.*(FPPSU(1,SPP)*CONJG(CK2CO(1,SK2))+
.   FPMSU(2,SPP)*CONJG(CK2CO(2,SK2)))*
.   (CPCO(1,SP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.   CPCO(2,SP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))*GG
. +4.*(FPPSU(1,SPP)*CONJG(CK2CO(1,SK2))+
.   FPMSU(2,SPP)*CONJG(CK2CO(2,SK2)))*

```

```

.      (CPCO(1,SP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.      CPCO(2,SP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))*QG
. -4.*(CPPCU(1,SPP)*CPCO(1,SP)+CPPCU(2,SPP)*CPCO(2,SP))*
.      (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCU(1,SPM))+
.      CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCU(2,SPM)))*GG
. +4.*(CPPCU(1,SPP)*CPCO(1,SP)+CPPCU(2,SPP)*CPCO(2,SP))*
.      (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCU(1,SPM))+
.      CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCU(2,SPM)))*QG      )
ANS1 = - 2.*(
. -(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.  (CPCU(1,SP)*GD(1,1)*FPPSU(1,SPP)+
.  CPCU(1,SP)*GD(1,2)*FPPSU(2,SPP)+
.  CPCU(2,SP)*GD(2,1)*FPPSU(1,SPP)+
.  CPCU(2,SP)*GD(2,2)*FPPSU(2,SPP))
. +(CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.  CONJG(CK2CO(1,SK2))*G(1,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM))+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*G(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.  (CPCU(1,SP)*QD(1,1)*FPPSU(1,SPP)+
.  CPCU(2,SP)*QD(2,2)*FPPSU(2,SPP))
. -(CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPCO(1,SP)+
.  CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPCO(2,SP))*
.  (CPPCU(1,SPP)*GD(1,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.  CPPCU(1,SPP)*GD(1,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2))+
.  CPPCU(2,SPP)*GD(2,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.  CPPCU(2,SPP)*GD(2,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2)))      )
AMPF = AMPF + ANS1 - 2.*(
. +(CPPCU(1,SPP)*QD(1,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.  CPPCU(2,SPP)*QD(2,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2)))*
.  (CONJG(CPMCO(1,SPM))*G(1,1)*CPCO(1,SP)+
.  CONJG(CPMCO(1,SPM))*G(1,2)*CPCO(2,SP)+
.  CONJG(CPMCO(2,SPM))*G(2,1)*CPCO(1,SP)+
.  CONJG(CPMCO(2,SPM))*G(2,2)*CPCO(2,SP))      )
AMPR = AMPR + FPI*GG*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPSU(1,SP)+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPSU(2,SP))*
.  (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPPSU(1,SPP)+
.  CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPPSU(2,SPP))*ME*NENN2
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPSU(1,SP)+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPSU(2,SP))*
.  (CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.  CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPPCO(2,SPP))*ME*NENN2
. +4.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPPSU(1,SPP)+
.  CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPPSU(2,SPP))*
.  (CPCO(1,SP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.  CPCO(2,SP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))

```

```

. +4.*(CPPCU(1,SPP)*CPCO(1,SP)+
.   CPPCU(2,SPP)*CPCO(2,SP))*
.   (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCUC(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCUC(2,SPM))) )
AMPB = AMPB + 2.*FPI*ME*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.   (FPSO(1,SP)*FPPSU(1,SPP)+FPSO(2,SP)*FPPSU(2,SPP))*NENN1
. +2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CONJG(CPMCOC(1,SPM))*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(CPMCOC(2,SPM))*FPSU(2,SP))*NENN1
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPSU(2,SP))*
.   (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPPSU(2,SPP))*NENN2
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPSU(2,SP))*
.   (CONJG(CPMCOC(1,SPM))*Q(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCOC(2,SPM))*Q(2,2)*CPPCO(2,SPP))*NENN2 )

```

C
C

```

ANS1 = 1*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,2)*CPPCO(2,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,2)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPSU(2,SP))
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,2)*CPPCO(2,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,2)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CONJG(CPMCOC(1,SPM))*Q(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CPMCOC(2,SPM))*Q(2,2)*CPCO(2,SP)) )
AMPAS = AMPAS + ANS1 + 1*(
. -4.*(FPSU(1,SP)*CONJG(CK2CO(1,SK2))+
.   FPSU(2,SP)*CONJG(CK2CO(2,SK2)))*
.   (CPPCO(1,SPP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.   CPPCO(2,SPP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))*HH
. +4.*(FPSU(1,SP)*CONJG(CK2CO(1,SK2))+
.   FPSU(2,SP)*CONJG(CK2CO(2,SK2)))*
.   (CPPCO(1,SPP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.   CPPCO(2,SPP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))*QH
. -4.*(CPCU(1,SP)*CPPCO(1,SPP)+
.   CPCU(2,SP)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCUC(1,SPM))+

```

```

.      CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCU(2,SPM))*HH
. +4.*(CPCU(1,SP)*CPPCO(1,SPP)+
.      CPCU(2,SP)*CPPCO(2,SPP))*
.      (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCU(1,SPM))+
.      CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCU(2,SPM))*QH      )
ANS1 = - 2.*(
. -(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.   (CPPCU(1,SPP)*HD(1,1)*FPSU(1,SP)+
.   CPPCU(1,SPP)*HD(1,2)*FPSU(2,SP)+
.   CPPCU(2,SPP)*HD(2,1)*FPSU(1,SP)+
.   CPPCU(2,SPP)*HD(2,2)*FPSU(2,SP))
. +(CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(1,SK2))*H(1,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*H(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.   (CPPCU(1,SPP)*QD(1,1)*FPSU(1,SP)+
.   CPPCU(2,SPP)*QD(2,2)*FPSU(2,SP))
. -(CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CPCU(1,SP)*HD(1,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.   CPCU(1,SP)*HD(1,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2))+
.   CPCU(2,SP)*HD(2,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.   CPCU(2,SP)*HD(2,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2)))      )
AMPFS = AMPFS + ANS1 - 2.*(
. +(CONJG(CPMCO(1,SPM))*H(1,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(1,SPM))*H(1,2)*CPPCO(2,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*H(2,1)*CPPCO(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*H(2,2)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CPCU(1,SP)*QD(1,1)*CONJG(CK2CU(1,SK2))+
.   CPCU(2,SP)*QD(2,2)*CONJG(CK2CU(2,SK2)))      )
AMPFS = AMPFS + FPI*HH*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPPSU(2,SPP))*
.   (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPSU(2,SP))*ME*NENN2S
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPPSU(2,SPP))*
.   (CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPCO(2,SP))*ME*NENN2S
. +4.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPSU(2,SP))*
.   (CPPCO(1,SPP)*CONJG(FPMSU(1,SPM))+
.   CPPCO(2,SPP)*CONJG(FPMSU(2,SPM)))
. +4.*(CPCU(1,SP)*CPPCO(1,SPP)+CPCU(2,SP)*CPPCO(2,SPP))*
.   (CONJG(CK2CO(1,SK2))*CONJG(CPMCU(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*CONJG(CPMCU(2,SPM)))      )

```

```

AMPBS = AMPBS + 2.*FPI*ME*(
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CONJG(FPMSO(1,SPM))+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CONJG(FPMSO(2,SPM)))*
.   (FPPSO(1,SPP)*FPSU(1,SP)+FPPSO(2,SPP)*FPSU(2,SP))*NENN1S
. +2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*Q(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*Q(2,2)*CPCO(2,SP))*
.   (CONJG(CPMCO(1,SPM))*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*FPPSU(2,SPP))*NENN1S
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPPSU(2,SPP))*
.   (CONJG(FPMSU(1,SPM))*QD(1,1)*FPSU(1,SP)+
.   CONJG(FPMSU(2,SPM))*QD(2,2)*FPSU(2,SP))*NENN2S
. -2.*(CONJG(CK2CO(1,SK2))*FPPSU(1,SPP)+
.   CONJG(CK2CO(2,SK2))*FPPSU(2,SPP))*
.   (CONJG(CPMCO(1,SPM))*Q(1,1)*CPCO(1,SP)+
.   CONJG(CPMCO(2,SPM))*Q(2,2)*CPCO(2,SP))*NENN2S      )
C
C   FUEER JEDE SPINKONFIGURATION WIRD DIE HELIZITAETSAMPLITUDE
BERECHNET
C   DIE BEITRAEGE DER HELIZITAETSAMPLITUDEN WERDEN AUFSUMMIERT
C
  HAMPL=HAMPL+ABS(0.5*(A*AMPA+F*AMPF+R*AMPR+AMPB)/GG
.   -0.5*(A*AMPAS+F*AMPFS+R*AMPRS+AMPBS)/HH )**2
C
1000      CONTINUE
2000      CONTINUE
3000      CONTINUE
4000      CONTINUE

PI3ENU = HAMPL

RETURN
END

```

Literaturverzeichnis

- [1] S. Egli et al., Phys. Lett. B 175 (1986) 97-100
- [2] R. Eichler et al., Phys. Lett. B 175 (1986) 101-104
- [3] R.D. Peccei et al., Phys. Lett. B 172 (1986) 435
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 223
- [5] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 279
- [6] R.D. Peccei, H.R. Quinn, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1440
- [7] R.D. Peccei, H.R. Quinn, Phys. Rev. D 16 (1977) 1791
- [8] A. Zehnder in "Fundamental interactions in low-energy systems"
(Plenum, New York 1985)
- [9] J. Schweppe et al., Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 2261
- [10] M. Clemente et al., Phys. Lett. B 137 (1984) 41
- [11] T. Cowan et al., Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 761
- [12] T. Cowan et al., Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 444
- [13] A. Shafer et al., J. Phys. G. 11 (1985) L69
- [14] A.B. Balantekin et al., Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 461
- [15] J. Reinhardt et al., Phys. Rev. C 33 (1986) 194
- [16] L. Krauss, F. Wilczek, Phys. Lett. B 173 (1986) 189
- [17] L. Krauss, M. Wise, Phys. Lett. B 176 (1986) 483
- [18] Particle Data Group, Phys. Lett. 170B (1986) 1
- [19] A. Kersch, Diplomarbeit 1984, Universität Mainz, unveröffentlicht

- [20] F. Scheck, *Leptons, Hadrons and Nuclei*, Amsterdam (1983)
- [21] I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol 1982
- [22] A. Kersch, F. Scheck, *Nucl. Phys. B* 263 (1986) 475-492
- [23] W.Jaus, *private Mitteilung* (1986)
- [24] D.Y. Bardin, E.A.Ivanov, *Sov. J. Part. Nucl.* 7/3 (1976) 286
- [25] P.S. Baranov et al., *Sov. J. Nucl. Phys.* 5 (1967) 873
- [26] S. Okubo, *Phys. Rev.* 179 (1969) 1629
- [27] P. Depommier et al., *Phys. Lett.* 7 (1963) 285
- [28] A. Stetz et al., *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 1455
- [29] A. Stetz et al., *Nucl. Phys. B* 138 (1978) 285
- [30] A. Bay et al., *Phys. Lett. B* 174/4 (1986) 445-450
- [31] L.E. Piilonen et al., *Phys. Rev. Lett.* 57/12 (1986) 1402-1405
- [32] S.G. Brown, S.A. Bludman, *Phys. Rev. B* 136 (1964) 1160
- [33] F. Scheck, A. Wulschleger, *Nucl. Phys. B* 67 (1973) 504
- [34] D.A. Bryman, P. Depommier, C. Leroy, *Phys. Rep.* 88 (1982) 151
- [35] S.B. Gerasimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 29 (1979) 259
- [36] M. Moreno, J. Pestiau, *Phys. Rev. D* 13 (1976) 175
- [37] N. Paver, M.D. Scadron, *Nuovo Cimento* 78 A (1983) 159
- [38] M. Moreno, *Phys. Rev. D* 16 (1977) 720
- [39] P. Pascual, R. Tarrach, *Nucl. Phys. B* 146 (1978) 509
- [40] N.F. Nasrallah et al., *Phys. Lett. B* 113 (1982) 61
- [41] V.N. Pervuskin, M.K. Volkov, *Phys. Lett.* 58 B (1975) 74-78
- [42] J. Gasser, H. Leutwyler, *Ann. Phys. (NY)* 158 (1984) 142
- [43] A. Manohar, *Phys. Lett. B* 164 (1985) 382

- [44] B.R. Holstein, Phys. Rev. D 33 (1986) 3316-3320
- [45] L. Amettler et al., Phys. Rev. D 29 (1984) 916
- [46] F. Scheck, R. Tegen, Nucl. Phys. A 364 (1981) 209-218
- [47] S.M. Korenchenko et al., Sov. Phys. JETP 44 (1976) 35
- [48] H.W. Atherton et al., Phys. Lett. 158B (1985) 81-84
- [49] S.R. Amendolia et al., Phys. Lett. 146B (1984) 116-120
- [50] Ch. Grab. A Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$. Dissertation Universität Zürich, 1985
- [51] N. Kraus. Der seltene Myon Zerfall $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ e^-$. Dissertation Universität Zürich, 1985
- [52] W. Bertl et al., Nucl. Phys. B 260 (1985) 1-31
- [53] W. Bertl et al., Nucl. Instr. Meth. 217 (1983) 367
- [54] A. van der Schaaf et al., Nucl. Instr. Meth. A240 (1985) 370
- [55] Diskriminator/Meantimer CFD MT 100, SIN Entwicklung
- [56] R. Eichler, SINDRUM Note 15 (1983), unveröffentlicht.
- [57] S. Egli, Diplomarbeit ETH Zürich (1983), unveröffentlicht.
- [58] H. Eichinger, M. Regler, CERN report 81-06 (1981).
- [59] K. Jakobs, Diplomarbeit Universität Bonn (1984), unveröffentlicht.
- [60] S. Grünendahl, Diplomarbeit Universität Bonn (1986), unveröffentlicht.
- [61] W.T. Eadie et al., Statistical Methods in Experimental Physics, North Holland, Amsterdam(1982).
- [62] G.E. Forden, D.H. Saxon, Nucl. Instr. Meth. A248(1986) 439-450.
- [63] R.L. Gluckstern, Nucl. Instr. Meth. 24(1963) 381-389
- [64] R. Brun et al., Geant3 Users Guide, Februar 1985

- [65] V. Blobel, Unfolding methods in high-energy physics experiments, Proceedings of the 1984 CERN school of computing, CERN 85-09, S.88-127.
- [66] F. James, Monte Carlo Phase Space, CERN 68-15, Mai 1968
- [67] R. Hagedorn, Relativistic Kinematics, Massachusetts 1973
- [68] E. Byckling, K. Kajantie, Nuclear Physics B9 (1969) 568-576
- [69] P. Nyborg et al., Phys. Rev. 140 4B (1965) 914-920
- [70] C. Schwarz, Journal of Mathematical Physics 26(5) (1985) 951-957
- [71] J.H. Friedman, M.H. Wright, ACM Transactions on Mathematical Software, 7(1)(1981) 76-92
- [72] J.H. Friedman, M.H. Wright, Divonne 4 - A Program for Multiple Integration and Adaptive Importance Sampling, CGTM No. 193 (1980)
- [73] J.H. Friedman, Data Analysis Techniques for High Energy Physics, Proc. CERN School of Computing 1974, CERN 74-23
- [74] F. James, Determining the Statistical Significance of Experimental Results, Proc. CERN School of Computing 1980, CERN 81-03
- [75] G.P. Lepage, Journal of Computational Physics 27 (1978) 192-203
- [76] S. Kawabata, Computer Physics Communications 41 (1986) 127-153
- [77] D. Y. Bardin, Yad. Fiz. 14 (1971) 427-436
- [78] C. Y. Lee, private Mitteilung an Dr. H. K. Walter, 17. März 1984
- [79] J.N. Huang, C.Y. Lee, Phys. Rev. D 29/5 (1984) 1017-1019
- [80] W.T. Scott, Rev. Mod. Phys. 35/2 (1963) 231-313
- [81] F. James, Comp. Phys. Comm. 10 (1975) 343
- [82] F. James, CERN Computer Center Program Library, D506 (1978)
- [83] L. Lyons et al., Nucl. Inst. Meth. A 245 (1986) 530-534
- [84] J.F. Gunion, D.E. Soper, Phys. Rev. D 35/1 (1987) 179-193

- [85] V.L. Highland, Nucl. Inst. Meth. 129 (1975) 497
- [86] V.L. Highland, Nucl. Inst. Meth. 161 (1979) 171
- [87] Berezhnev et al., Sov. Jour. Nucl. Phys. 16 (1973) 99
- [88] G.Bardin et al., Nucl. Phys. B 120 (1977) 45
- [89] E.B. Dally et al., Phys. Rev. D 24 (1981) 1718
- [90] E.B. Dally et al., Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 375
- [91] A. Quenzer et al., Phys. Lett. 76 (1978) 512
- [92] J.F. Crawford, SINDRUM Note 8, 1982, unveröffentlicht.
- [93] CERN Computer center program library (1983)
- [94] Numerical Algorithms Group program library (1981)
- [95] R.J. Royston, J.Gregory, Comm. of the ACM 9 (1966) 280
- [96] A.G. Frodesen, O. Skjeggstad, H. Tøfte, Probability and Statistics in Particle Physics, Universitetsforlaget Bergen (1979)
- [97] M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970

Danksagung

Das $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ Experiment wurde im Rahmen der SINDRUM Kollaboration durchgeführt, zu der Wissenschaftler des Physik Instituts der Universität Zürich, des Instituts für Mittlere Energiephysik der ETH Zürich, des Schweizerischen Instituts für Nuklearforschung, des Physikalischen Instituts der RWTH Aachen und des Instituts für Nuklearforschung in Swierk gehören. So sind in die vorliegende Arbeit viele Hilfen und Anregungen meiner Kollegen U. Bellgardt, W. Bertl, R. Eichler, R. Engfer, Ch. Grab, E. Hermes, T. Kozłowski, N. Kraus, N. Lordong, C. Niebuhr, H. Pruys, A. van der Schaaf, D. Vermeulen und H.K. Walter eingeflossen. Allen Mitgliedern dieser Kollaboration danke ich herzlich für die intensive fachliche und persönliche Unterstützung.

Herrn Prof. R. Engfer möchte ich besonders danken, daß er mir die Mitarbeit in der SINDRUM Gruppe ermöglichte und die Voraussetzungen für eine eigenverantwortliche Arbeit schuf. Er ermunterte mich außerdem, die Ergebnisse dieser Arbeit in einer Reihe von Vorträgen einem breiteren Publikum vorzustellen, so daß ich Gelegenheit hatte, auch diese Seite einer wissenschaftlichen Tätigkeit kennenzulernen.

Herrn H.K. Walter möchte ich für seine offene Kritik und sein ständiges Engagement sowohl in experimentellen Angelegenheiten als auch bei der Erstellung von Publikationen und der Durchsicht der Manuskripte danken.

A. Kersch danke ich für die Berechnung des $\pi^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e$ -Matrixelements. M. Schaad und M. Doser danke ich für ihre ständige Hilfsbereitschaft und die Bereitstellung von Programmen.

Die Arbeit wurde unterstützt durch das Physik Institut der Universität Zürich, das Schweizerische Institut für Nuklearforschung und den Schweizerischen Nationalfond zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung.

Waldshut, im Frühling 1987

Lebenslauf

- Name: **Egli, Jorg, Stephan, Markus**
- Heimatort: Schänis (SG)
- Geburt: am 30. Juli 1958 in Bonn, Deutschland
- Schulen :
- 1965-1968: Katholische Volksschule Plittersdorf (Bonn)
- 1968-1977: Gymnasium Aloysiuskolleg (Bonn).
Juni 1977: Abschluß mit Abitur.
- 1977-1979: Physik Grundstudium an der Rheinischen-Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
Juni 1979: Abschluß mit dem Vordiplom.
- 1979-1983: Physikstudium an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETHZ).
Frühjahr 1983: Abschluß der Diplomarbeit unter Dr. H.K. Walter am Schweizerischen Institut für Nuklearforschung (SIN).
- 1983-1987: Arbeiten für die vorliegende Dissertation am Physik-Institut der Universität Zürich unter Leitung von Herrn Prof. Dr. R. Engfer im Rahmen der SINDRUM-Kollaboration.

Während des Studiums an der Rheinischen-Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn besuchte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren K.H. Althoff, von Busch, A. Fäßler, H. Karcher, Klingenberg, Knop, Puff, V. Rittenberg, Speth, U. Trottenberg, Ziller.

An der ETH-Zürich besuchte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren W. Baltensperger, A. Bauder, J.P. Blaser, J. Brunner, E. Engeler, P. Feyerabend, W. Grüebler, P. Henrici, K. Hepp, J. Hersch, H. Hofer, A. Huber, W. Hunziker, W. Känzig, F. Kneubühl, R. Müller, V.L. Telegdi, H.K. Walter, F. Weinberg, N. Wirth, W. Wölfl.

Nach dem Diplom besuchte ich an der Universität Zürich Vorlesungen und Seminare bei den Dozenten C. Amsler, D. Brinkmann, E. Brun, R. Engfer, W. Jaus, W. Kündig, M.P. Locher, P.F. Meier, V. Meyer, H.H. Müller, H.S. Pruys, G. Rasche, P. Truöl, F. Waldner, D. Wyler.

